FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio III

Palchetto GG

Num.° d' ordine 67-2-22

NAZIONALE
B. Prov.
II
C03
C12
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI

B. Rol.
II
608

Google

C09774 SEV

LES ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DE L'ETENDUE;

QUI COMPRENNENT LES ELEMENS d'Euclide; les plus belles Propositions d'Archimede touchant le Cercle, la Sphère, le Cylindre & le Cône; avec une idée de l'Analyse, & une Introduction aux Sections Coniques.

Par le R. P. BERNARD LAMY, *Prêtre de l'Oratoire.*

Sixieme Edition, revue & augmentée.

A AMSTERDAM,
Chez PIERRE MORTIER.
M. DCC. XXXIV.

PREFACE,

Où l'on fait voir ce que c'eſt que la Géometrie, quelle eſt ſon utilité, & quels ſont ſes Principes.

DANS les Elémens de Mathématique imprimés pour la troiſieme fois en 1704, nous avons conſideré les proprietés de la Grandeur en général. L'étendue qui eſt ſenſible dans les corps, en eſt une eſpece. Dans tout corps, ou dans ce qui eſt étendu, on diſtingue trois dimenſions, la longueur, la largeur, & la profondeur. Ce ſont les proprietés de l'étendue & par conſéquent des corps, que nous allons examiner; non pas celles des corps ſenſibles, la dureté, la couleur, le froid, le chaud; mais celles de l'étendue intelligible, ou du corps en tant qu'il eſt conçu comme un Etre qui a trois dimenſions, qui eſt long, large, & profond. Quand il n'y auroit aucun Etre tel dans le monde, tout ce que nous allons dire des proprietés du corps ainſi conſideré, ne laiſſeroit pas d'être éternellement & immuablement vrai; car ce n'eſt pas une matiere ſujette au changement, qui eſt ici notre objet. Il ne s'agit d'aucun corps particulier; mais parce que c'eſt pour meſurer la Terre qu'on s'eſt appliqué à étudier les proprietés du corps en général, on donne à ces Elémens le nom de Géometrie, qui s'étend

BIBLIOTECA PROVINCIALE

bien plus loin qu'à la meſure de la Terre. Comme elle découvre les proprietés de l'étendue, elle comprend la connoiſſance de preſque toutes les choſes qui ſont dans le Monde, qui eſt l'aſſemblage de tous les corps; car ce qui convient au corps intelligible, ou au corps en général, convient à tout ce qui eſt réellement étendu. Les Aſtres ſont des corps, les Cieux ſont étendus. Leur diſtance de la Terre, leur grandeur, leur diametre ſe meſurent par des lignes, qui peuvent auſſi marquer leurs mouvemens; ainſi l'Aſtronomie ou la ſcience des Aſtres, les operations & les raiſonnemens des Aſtronomes, ſont fondez ſur la Géometrie.

La Gnomonique eſt un Art qui trace ſur un plan la route du Soleil, en marquant le chemin de l'ombre que fait le ſommet du ſtile du Cadran qui repréſente la Terre, autour de laquelle le Soleil tourne; ainſi les opérations de cet Art ſont fondées ſur la Géometrie. La Marine, dans la plus grande partie de ſes pratiques, eſt une dépendance de l'Aſtronomie. Il eſt évident que l'Architecture, les Fortifications, les Méchaniques, ont pour objet des choſes étendues; par conſéquent elles ſont renfermées dans la ſcience du corps en général. Il n'y a gueres autre choſe dans les corps conſiderez dans leur état naturel, que ce qui eſt dans le corps mathématique, c'eſt-à-dire, ſeulement conſideré comme étendu. On a ſujet de croire que toutes les qualitez ſenſibles du

corps

corps naturel ne ſont point en lui, mais dans l'ame qui les ſent; on peut donc dire que toute cette partie de la Philoſophie, qu'on nomme la Phyſique, n'eſt qu'une Géometrie. Je parle de cette partie où il ne s'agit point de l'eſprit, ni de ſon union avec le corps, mais ſimplement du corps. On ne peut donc être Phyſicien ſans être Géometre. Dans l'Optique, la Dioptrique, la Catoptrique, la Perſpective, tout ſe démontre par lignes; & généralement dans une bonne Phyſique on rend raiſon de tous les effets des corps en montrant que ce ſont des ſuites de leur figure, de leurs mouvemens, qui s'expriment par des lignes. En un mot, la Géometrie eſt comme les élémens de toutes les ſciences, qui ont pour objet les corps.

Néanmoins ce n'eſt pas ſur cela ſeul que je fonde l'eſtime qu'on doit faire de la Géometrie, mais ſur ce qu'elle eſt propre pour former l'eſprit, & le rendre exact, étendu & pénétrant. Nous avons vu dans la Préface du Traité de la Grandeur, l'importance qu'il y a de s'accoutumer à conſiderer les choſes abſtraites, c'eſt-à-dire, ſéparées de toute matiere ſenſible; & que pour cette raiſon l'étude de ce Traité étoit avantageuſe, parce que les véritez qu'on y propoſoit étant expliquées ſans figures, leurs idées ſe préſentoient à l'eſprit ſans images. On ne peut voir par l'imagination que ce qui eſt corps;

ceux donc qui ne font uſage que de leur imagination, ne peuvent appercevoir les choſes ſpirituelles. Ils ne croyent pas même qu'il y en ait, parce qu'ils n'en trouvent point d'images dans leur imagination: comme lorſque dans les tenebres on cherche quelque corps avec les mains, ſi l'on ne rencontre rien qui réſiſte, on croit qu'il n'y en a aucun.

Il eſt donc important de s'accoutumer à voir ſans images, & de ſe convaincre qu'il y a des véritez qui ſe conçoivent autrement que les corps. Mais il ne faut pas pour cela négliger de cultiver ſon imagination. On en peut même tirer un grand ſecours pour concevoir les choſes ſpirituelles; & c'eſt une néceſſité dans l'état où nous nous trouvons, d'y avoir recours. En quittant Dieu nous ſommes tombez dans les corps: il faut donc nous y appuyer pour nous relever, comme nous le faiſons quand nous ſommes tombez par terre. L'ame voit la vérité qui lui eſt préſente, & à laquelle elle eſt attentive: mais les corps l'attirent vers eux par les impreſſions qu'ils font ſur elle, & lui font perdre de vue cette vérité, à moins qu'elle n'y ſoit comme attachée par les corps mêmes, qui ſont la cauſe de ſes diſtractions; ce qui arrive lorſque cette vérité eſt exprimée par des ſignes ſenſibles, qui tournent l'ame vers eux, & l'obligent de voir la vérité qu'ils marquent. Peu de perſonnes ſe peuvent paſſer de ce ſecours. Il y a d'habiles gens qui ne voyent rien dans un ſujet lorſ-

qu'ils

qu'ils le considerent par les seuls yeux de l'esprit, & qui après l'avoir exprimé sur le papier, apperçoivent tout ce qu'il faut voir pour en juger.

Ainsi après avoir lu le Traité de la Grandeur en général, & s'y être accoutumé à concevoir les choses sans images, ce qui est très important pour la Religion; il est utile d'apprendre ici comme il faut se servir de son imagination, qui n'est point dangereuse à ceux qui savent distinguer ce que l'esprit pur conçoit, d'avec ce qu'elle présente. Elle est une source de plusieurs erreurs, lorsqu'on ne consulte point la raison; mais aussi il faut avouer que ceux qui veulent trop s'élever sans s'appuyer sur ce qui est sensible, sont fort sujets à l'illusion, & qu'ils s'égarent souvent dans de vaines pensées. L'ame qui est plus occupée des corps que des choses spirituelles, n'apperçoit qu'à demi celles-ci. Si elle n'est donc réservée dans ses jugemens pour ne prononcer que sur ce qu'elle voit; si ce qu'elle considere n'est extrêmement simple, comme sont les choses qui ont fait le sujet du Traité de la Grandeur, elle se trompe facilement. Dans les autres Sciences abstraites, l'erreur y est toujours à craindre; on est obligé de se contenter des vraisemblances: ce qui n'arrive pas dans celles qui sont aidées de l'imagination, comme la Géometrie, dont les Théorêmes frapent l'esprit trop vivement pour s'y tromper, quand on les considere avec un peu d'attention. La vérité

té ou la fauſſeté y paroiſſent trop évidemment, pour être confondues.

On trouve dans la Géometrie des modeles qui ne peuvent tromper, des démonſtrations claires & convaincantes. Elle apprend la méthode de conduire l'eſprit de véritez en véritez. On y voit des exemples, comme dans la recherche des Sciences il faut ſe ſervir des premieres connoiſſances qu'on a acquiſes, ou de celles qui nous ſont naturelles, pour aller plus loin. L'art & le ſecret des Sciences ne conſiſtent qu'à déduire des premieres véritez que Dieu a miſes dans notre ame, les conſéquences dont elles renferment les principes, c'eſt-à-dire, à ménager la Science naturelle; ce que les Géometres font admirablement, comme nous l'allons faire voir, en découvrant en même tems les principes & les fondemens de la Géometrie, ce qui ſervira de diſpoſition pour la comprendre avec plus de facilité.

Dans la Géometrie, comme dans toutes les autres Sciences, on ne ſe trompe point, quand on raiſonne ſur des idées claires, qu'on ne dit que ce que l'on conçoit. La Géometrie a cela de particulier, que les principes ſur leſquels elle eſt fondée ſont en très petit nombre. Elle ne parle que de choſes ſimples, faciles à connoître, ou de celles qui en ſont des ſuites néceſſaires & évidentes. Les idées de la ligne droite, & des cercles, dont elle s'occupe d'abord, ſont claires. Les véritez, ſur leſquelles elle

s'ap-

*s'appuye, ſont inconteſtables, & connues de tout le monde; & c'eſt à elles qu'on peut réduire tout ce qu'elle entreprend de démontrer. On ne peut ignorer ni conteſter, qu'*une choſe ne peut pas être, & n'être pas dans un même tems; *d'où il s'enſuit, que puiſque le tout & ſes parties priſes enſemble ne ſont qu'une même choſe, il faut que* le tout ſoit égal à ſes parties: *car autrement la même choſe ſeroit & ne ſeroit pas. De ce principe on tire encore cette conſéquence, qu'il faut que* deux grandeurs égales à une même grandeur, ſoient égales entre elles; *car ces trois grandeurs ne ſont qu'une même choſe; ainſi ſi elles étoient inégales entre elles, elles ſeroient & ne ſeroient pas. On peut de même rapporter à ce principe les quatre Axiomes ſuivans.*

Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales, les touts ſeront égaux.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront égaux.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront inégaux.

Si à des grandeurs inégales on en ajoute d'égales, les touts ſeront inégaux.

Ces Axiomes ſont fondez ſur ce que les touts égaux ont des parties égales, & les inégaux des parties inégales. Or ſi les touts égaux n'avoient pas des parties égales, ils ſeroient & ne ſeroient pas.

De ces véritez ſuivent une infinité d'autres

veritez ; par exemple, que les moitiez de deux touts égaux ſont égales, *ou que* les doubles de ces touts ſont égaux, *&* les tiers de deux touts égaux ſont égaux, *ou que* les triples de deux touts égaux ſont égaux ; *ainſi des quarts & des quadruples, & d'une infinité de ſemblables Propoſitions.*

Les véritez ſuivantes, bien qu'elles ſoient, pour ainſi dire, groſſieres, ſont des ſources très fécondes de pluſieurs démonſtrations, ſavoir, que le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties : *& que* ce qui eſt contenu, *ou* renfermé dans une grandeur, ne peut être plus grand que cette grandeur. *Que* deux grandeurs qui conviennent en tout, lorſqu'on les poſe l'une ſur l'autre, ſont égales.

*C'eſt ſur ce principe, qu'*une choſe ne peut pas être, & n'être pas, *que les Géometres ſe fondent, lorſqu'ils tirent leur preuve de la conſtruction, ou de la ſuppoſition qu'ils ont faite, c'eſt à dire, qu'on ne peut pas conteſter leur concluſion, à moins qu'on ne diſe qu'une choſe peut être, & n'être pas en même tems, ce qui eſt abſurde. Car leur concluſion eſt une ſuite ſi naturelle de ce qui a été fait, que ſi cette concluſion ne ſuit pas, il faut que la choſe n'ait pas été faite comme on l'a ſuppoſé.*

Tous ces principes ne ſont dans le fond que celui-ci, qu'on ne ſe trompe point, quand on raiſonne ſur des idées claires, qu'on ne dit que ce que l'on conçoit. *Mais la difficulté, c'eſt de diſ-*

diſtinguer les idées qui ſont veritablement claires, & les choſes qui ſe peuvent concevoir. Comme je l'ai dit, celles qui ſont le ſujet de la Géometrie ſont ſimples, aiſées à connoitre, à diſtinguer. L'idée du corps eſt claire : les Géometres ne conſiderent que ſes dimenſions, dont la notion eſt très claire. Perſonne ne peut ignorer les proprietez générales de l'étenduë, non plus que ces principes généraux, dont nous venons de parler. On ſait ce que c'eſt que d'être étendu, long, large & profond ; & c'eſt le ſeul uſage que les Géometres ont fait de ces connoiſſances, qui leur a fait découvrir une infinité de véritez cachées au reſte des hommes ; preuve evidente, que ſi on uſoit bien des premieres connoiſſances naturelles, & ſi on alloit par ordre comme ils font, on feroit d'admirables progrès dans les Sciences. On ne les acquiert que par ce moyen ; c'eſt pourquoi les premieres études n'étant que pour apprendre comme il faut étudier, il n'y a point de Science plus propre pour les premiers exercices que la Géometrie.

Mais pour cela il faut qu'elle ſoit traitée avec méthode, ce que ne fait pas Euclide. Il n'a penſé qu'à ranger ſes Propoſitions, de maniere qu'elles ſe ſerviſſent de preuves les unes aux autres ; en quoi il a réuſſi. La vérité ſe trouve dans ſes Elémens ; mais au reſte il y a tant de confuſion, que bien loin de donner à l'eſprit l'idée & le goût du véritable ordre, ils ne peuvent au contraire que l'accoutumer au deſor-

dre & à la confuſion, comme s'en plaint Monſieur Nicole dans la Préface des Elémens de Géometrie de Monſieur Arnaud, qui furent imprimez pour la premiere fois en 1667.

C'eſt dans ces Elémens de Monſieur Arnaud qu'on trouve cet ordre naturel, qui n'eſt point dans ceux d'Euclide. S'il eût traité des Solides, je n'aurois peut-être jamais penſé à travailler à de nouveaux Elémens. Ce fut pour y ſuppléer que j'en eus la premiere penſée. Je traite en ceux-ci ce qui regarde les Solides, d'une maniere beaucoup plus étendue que ne fait Euclide & ſes Commentateurs; car j'y comprends ce qu'Archimede a démontré de plus conſiderable touchant les Cylindres, les Cônes & la Sphere.

J'ai pris à tâche d'expliquer tout Euclide, à la réſerve du ſeptieme, du huitieme & du neuvieme Livre, qui ne traitent que des nombres, ce qui n'apartient pas à la Géometrie. Je n'ai pas auſſi voulu groſſir mon Ouvrage de toutes les Propoſitions de ſon dixieme Livre, parce qu'on ne le cite gueres; & que ce qui y eſt d'uſage ſe peut expliquer en peu de pages, comme je croi l'avoir fait. Ses Elémens ſont comme la clef commune à preſque tous les Livres de Mathématiques. On les cite par-tout; ce qui oblige de les ſavoir. Nous n'avons de lui que les Propoſitions qui ſont dans ſes Elémens: les démonſtrations ſont de Proclus. Ainſi pour donner un Euclide, il n'eſt queſtion que de

rap-

rapporter ſes Propoſitions. L'expérience fera voir que le ſeul ordre que je leur donne, en facilite la démonſtration; c'eſt pourquoi j'eſpere qu'on apprendra ici Euclide avec beaucoup plus de facilité qu'en aucun de ſes Commentateurs; outre que mon Ouvrage eſt plus court, quoiqu'il contienne plus de choſes.

Je le diſtribue ſelon les trois dimenſions qui ſe diſtinguent dans le corps, ſavoir, la longueur, la largeur, & la profondeur ou ſolidité. Dans le premier Livre je conſidere les proprietez de la premiere dimenſion, me bornant encore à la longueur, qui eſt une ligne, ou droite ou circulaire. Ces lignes étant plus ſimples & plus faciles à connoître, l'ordre demande qu'on commence par elles, & qu'on réſerve à un autre lieu de parler des autres lignes, qui ſont plus compoſées, & qui ont des proprietez plus cachées. Dans le ſecond Livre je traite de la ſeconde dimenſion, & je n'y parle pour la même raiſon que des largeurs ou ſurfaces qui ſont les plus ſimples; c'eſt-à-dire, des ſurfaces droites qu'on nomme plans, qui ſont bornées par des lignes droites ou par des cercles Dans le troiſieme Livre j'applique aux lignes les proprietez de la grandeur en général, qui leur conviennent. Ainſi cette nouvelle Edition ne ſuppoſe point abſolument qu'on ait vu les Elémens des Mathématiques, ou Traité de la Grandeur en général Par conſéquent on pourra commencer l'étude des Mathématiques par

ces Elémens de Géometrie, si on espere y trouver plus de facilité. Dans le quatrieme Livre j'explique ce qui regarde les raisons & les proportions des lignes droites, des cercles, & des surfaces droites, ou des plans. Dans le cinquieme je traite de la solidité.

Comme mon principal dessein est de contribuer à rendre l'esprit exact & pénétrant, à quoi la Méthode, que les Géometres appellent Analyse, est particulierement utile; je tâche dans le sixieme Livre de donner une idée de cette Méthode, appliquant à la Géometrie ce que j'en ai dit ailleurs par rapport à la Grandeur en général. Je fais voir comment l'on peut porter loin les premieres connoissances de la Géometrie, & en même tems je propose des essais de cette Méthode sur quelques Problêmes.

Je n'ai parlé dans ces Elémens que de la ligne droite & circulaire, & des solides compris sous des surfaces planes ou sphériques, qui se font par le mouvement de ces deux lignes. Mais j'ajoute à la fin une Introduction aux Sections Coniques, qui servira de premiers Elémens pour les lignes courbes, & les solides qu'elles forment.

Ce n'est donc point en retranchant de ces Elémens des choses nécessaires, que je les ai rendus courts; mais en prenant des voyes abregées, par où je mene tout d'un coup à la vérité. Je tire mes demonstrations de la notion de la chose même dont je parle; de sorte qu'avec un peu d'attention à cette notion, on découvre soi-même la dé-

démonſtration. Il n'y a dans mes Elémens qu'un petit nombre de Théorèmes fondamentaux. Quand on les aura compris, les autres qui n'en ſont que des Corollaires, c'eſt-à-dire, des conſéquences évidentes, ne ſeront plus difficiles. Enfin ce qui donnera de la facilité pour entendre & retenir ce qu'on va lire, c'eſt que toutes les matieres ſont rangées ſous des chefs qui les lient, & en font un corps de doctrine.

J'ai travaillé de nouveau cet Ouvrage, ayant reconnu qu'il pouvoit ſervir à former l'eſprit & le cœur. C'eſt Dieu qu'il faut regarder en toutes choſes, & l'etude de la Géometrie y agit porter. On y trouve de grands ſujets de penſer à lui. Tout ce qu'on voit de beau dans cette Science touchant les figures, leurs raiſons & leurs proportions, ſe remarque enſuite dans les Ouvrages de la Nature; ce qui donne lieu d'admirer celui qui en eſt l'Ouvrier. Il n'y a point de petit corps qui ne ſoit capable de toutes les figures de Mathématique, ſelon qu'on concevra que ſa matiere ſera diſpoſée. Ces figures ont toutes leurs proprietez. L'eſprit peut par conſéquent découvrir en chaque corps un nombre infini de véritez ſurprenantes, lorſqu'il le conſidere avec ordre; c'eſt-à dire, s'il fait les conſiderations que peut faire un habile Géometre, & s'il applique à ce corps tout ce que la Géometrie enſeigne.

Combien d'admirables véritez verrions-nous donc

donc en Dieu, ſi nous l'étudiions autant que nous faiſons les corps? Nous n'y voyons preſque rien, parce que notre eſprit ne peut s'appliquer autant de tems à lui, qu'il faut à la matiere. Mais combien de choſes les Saints découvrent-ils en ſa Divine Eſſence, qui eſt la cauſe de la fécondité de la matiere? Et ſi la connoiſſance des véritez que la Géometrie nous enſeigne donne tant de contentement, quel eſt le plaiſir des Bienheureux qui voyent des véritez d'autant plus excellentes, que Dieu ſurpaſſe infiniment les Corps?

Ainſi, outre le plaiſir ſpirituel que donne la Géometrie, pour inſinuer du mépris pour les voluptez, & par-là nous rendre plus propres pour la Morale de l'Evangile, qui eſt ennemie de ces voluptez: outre qu'elle diſpoſe l'eſprit pour toutes les Sciences, pour celles mêmes qui ſont élevées au-deſſus de la matiere, dont elle le rend capable; elle nous fait encore connoitre quelle eſt la vaſte étendue de la Science que poſſedent ceux qui voyent Dieu, & de quel plaiſir ils jouïſſent en découvrant tant de véritez dans la Divine Eſſence. Par conſéquent la Géometrie pourroit donner un plus ardent deſir de poſſeder Dieu, que de devenir Géometre, ſi on l'étudioit avec l'eſprit que je le prie lui-même de donner à ceux qui ſe ſerviront de mon Ouvrage.

PAS-

PASSAGE DE PLATON,

du Livre ſeptieme de ſa République, touchant l'excellence & l'utilité de la Géometrie.

VOus voyez donc, cher Ami, que les Mathématiques ſont néceſſaires, puiſqu'elles nous obligent *par cette exactitude, dont elles donnent l'habitude*, de faire uſage de notre eſprit. C'eſt certainement ce qu'elles font ; & c'eſt une choſe remarquable, que tous les hommes étant capables par leur nature de raiſonner, & de comprendre toutes les Sciences, ceux qui ont moins d'ouverture, s'ils étudient cette Science, quand elle leur ſeroit inutile pour toute autre choſe, ils en retirent cet avantage, que leur eſprit devient plus ouvert; car il n'y a point d'étude qui l'exerce plus, & qui la rende *autant capable d'attention*; auſſi c'eſt à cette étude qu'il faut appliquer ceux en qui on remarque un eſprit qui mérite d'être cultivé.

PAS-

PASSAGE DE PLUTARQUE,

du huitieme Livre des Queſtions ſympoſiaques, Queſtion ſeconde.

PLATON loue la Géometrie, parce qu'elle détache des ſens, auxquels nous nous donnons entierement, & qu'elle nous tourne vers ce qui eſt intelligible & éternel, dont la connoiſſance eſt la fin de la Philoſophie, comme la vue claire des Myſteres eſt la fin de ceux qui s'y font initier. La volupté & la douleur ſont comme un clou, qui attache ſi fortement l'Ame au Corps, qu'elle en devient dépendante: les choſes corporelles lui deviennent ainſi plus claires, parce qu'elle en eſt plus touchée. Elle ne juge donc point des choſes par la lumiere de la raiſon, mais par les impreſſions qu'elle reçoit de ſon corps. La force de la douleur ou des plaiſirs, fait qu'elle ne devient ſenſible qu'à ces perpetuels & divers changemens des choſes corporelles qui agiſſent ſur elle; ainſi elle s'aveugle, & perd cette lumiere infiniment plus précieuſe que les yeux du corps, étant ſeule capable de nous faire appercevoir la Nature Divine. La Géometrie eſt comme un miroir poli, où l'on voit des veſtiges & des images des choſes intellectuelles, vers leſquelles elle tourne l'eſprit, après l'avoir comme purifié & dégagé de la ſervitude des ſens.

TA-

TABLE
DES LIVRES, SECTIONS, CHAPITRES, ET PRINCIPALES MATIERES.

LIVRE PREMIER.

De la premiere eſpece d'Etendue, qui eſt la Longueur.

Des Lignes droites & circulaires.

SECTION I. *DES differentes eſpeces d'Etendue.* 1

SECT. II *De la longueur, qui eſt la premiere & la plus ſimple dimenſion du corps. Des lignes droites.* 5

SECT. III. *De la ligne, qui eſt circulaire.* 9

SECT. IV. *De la differente poſition de deux lignes droites au regard l'une de l'autre.* 13

Des lignes perpendiculaires, *ibid.*

Des lignes obliques. 21

Des lignes paralleles. 25

SECT. V. *De la differente poſition de deux cercles au regard l'un de l'autre.* 30

SECT. VI. *De la poſition d'une ligne droite au regard d'un cercle. Des cordes du cercle, arcs, diametres.* 34

Des Lignes, Tangentes, ou Touchantes. 45

TABLE DES SECTIONS.

LIVRE SECOND.

De la seconde espece d'Etendue, qui est la Largeur.

Des Surfaces planes.

SECTION I. *DES Angles ou Surfaces, qui sont entre deux lignes, qui se rencontrent indirectement.* 50

Des differentes sortes d'Angles par rapport à leur ouverture, ou par rapport au cercle. 54

Des Sinus. 58

SECT. II. *De la comparaison des Angles, & de leur differente position au regard d'un cercle.* 65

De la mesure d'un Angle, soit qu'il soit dedans ou hors du cercle, dans la circonference ou dans le centre, dans un segment, ou entre une Tangente & une corde, ou une Sécante. 66

SECT. III. *Des Triangles, & de leurs differentes especes & proprietez.* 77

SECT. IV. *Des figures de plusieurs côtés, & polygones, ou de plusieurs angles: leurs especes: comment elles se font: & leurs proprietez.* 94

SECT. V. *De la mesure de l'aire des surfaces triangulaires quadrilateres.* 104

De la méthode des indivisibles. 109

De la mesure des surfaces des polygones. 117

LIVRE TROISIEME.

Les Proprietez qui conviennent à toue Grandeur, appliquées aux lignes, plans, ſolides; & démontrées.

SECTION I. *LEs quatre operations de l'Arithmétique, Addition, Souſtraction, Multiplication, & Diviſion, ſur les lignes, ſur les plans, & ſur les ſolides.* 123
SECT. II. *De la puiſſance des lignes.* 133
SECT. III. *Des raiſons & proportions des lignes, des ſurfaces & des ſolides.* 145
SECT. IV. *Des raiſons compoſées, & de leurs proprietez.* 164
SECT. V. *De la comparaiſon des raiſons.* 171

LIVRE QUATRIEME.

Des Raiſons & Proportions des Lignes, des Triangles, des Figures, tant de leurs côtez & circuit, que de leurs ſurfaces.

SECTION I. *METhode pour trouver & démontrer les raiſons & les proportions des lignes.* 180
SECT. II. *Des raiſons & proportions des côtez des Triangles.* 186
Des Triangles dont les côtez ſont coupez par une ligne parallele à la baſe. 190
Des Triangles dont les côtez ſont coupez par une antiparallele à la baſe. 192
Des lignes réciproques. 195

SECT.

SECT. III. *Des raiſons & proportions que les circuits de deux ou pluſieurs figures ont entre eux, & avec les raiſons des cercles où ces figures ſont inſcrites.* 205
SECT. IV. *Des raiſons & des proportions des ſurfaces.* 213
SECT. V. *De la commenſurabilité ou incommenſurabilité des lignes & des ſurfaces.* 243
SECT. VI. *Des raiſons des cordes avec les rayons du cercle.* 257

LIVRE CINQUIEME.

De la troiſieme eſpece d'Etendue, c'eſt-à-dire, des Solides; comment les Solides ſe forment, & ſe meſurent.

SECTION I. *DEs Sections & des rencontres des plans, dont on peut concevoir qu'un Solide eſt formé.* 281
SECT. II. *De la compoſition des Solides ſelon leurs ſurfaces, & ſelon leur ſolidité. De leurs noms & differentes eſpeces.* 297
SECT. III. *De la ſurface des Solides, comment elle ſe meſure.* 309
SECT. IV. *De la ſolidité des Solides, comment elle ſe meſure; & de leurs raiſons.* 326
SECT. V. *De la maniere d'inſcrire ou circonſcrire à une ſphere les cinq corps reguliers.* 343

LIVRE SIXIEME.

De la Méthode.

CHAPITRE I. *DE la méthode qu'il faut ſuivre dans l'examen d'une Queſtion, ou Problême. En premier lieu, il la faut bien concevoir, & l'exprimer nettement.* 369

CHAP. II. *On peut exprimer les lignes & toutes les grandeurs, dont il eſt parlé dans une Queſtion, & faire ſur elles toutes les operations de l'Arithmétique, ſans les connoitre.* 372

CHAP. III. *Après avoir exprimé une Queſtion ou Problême, & fait la figure qui lui convient, il faut diſtinguer ce qui eſt connu d'avec ce qui ne l'eſt pas, & conſiderer ſi le Problême eſt déterminé, ou indéterminé.* 376

CHAP. IV. *La connoiſſance des rapports qui ſont entre les lignes de la figure d'un Problême, donne le moyen de les égaler ou de trouver de doubles expreſſions; ce qui s'appelle* Equation. 379

CHAP. V. *Il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de lignes inconnues, & réduire toutes ces Equations à une ſeule.* 381

CHAP. VI. *Il faut réduire les termes d'une Equation à l'expreſſion la plus ſimple, & faire enſorte que la grandeur inconnue ſe trouve ſeule dans l'un des membres de l'Equation.* 383

CHAP. VII. *Les Equations ſont d'une ou de pluſieurs dimenſions ou degrez; & ce ſont ces degrez qui diſtinguent les Problêmes.* 388

CHAP. VIII. *De la conſtruction & effection Géometrique des Equations, c'eſt-à-dire, de la maniere d'exprimer avec des Lignes les Quantitez qui s'y rencontrent.* 390

TABLE DES CHAPITRES.

CHAP. IX. *De la construction ou effection Géometrique, qui est un Lieu. Qu'est-ce que ce Lieu? Quand est-ce qu'un Problême est un Lieu? Distinction des Problêmes selon cette consideration.* 397

CHAP. X. *On ne peut exprimer géometriquement avec la règle & le compas, que les Equations simples, ou qui ne sont que de deux degrez. On ne peut donc pas avec la connoissance de ces Elémens, résoudre les Problêmes solides.* 400

CHAP. XI. *Essais de la méthode sur quelques Problêmes.* 402

INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

CHAP. I. *DEs lignes courbes, que représentent les differentes sections du cône. Leurs noms, & la méthode la plus simple pour connoitre leurs principales proprietez.* 417

CHAP. II. *De la Parabole ou ligne courbe, que représente la section d'un cône droit par un plan parallele à l'un de ses côtez.* 421

CHAP. III. *De l'Ellipse, ou de la ligne que représente la section d'un cône par un plan, qui coupe ses deux côtez, & qui ne soit pas parallele à celui de la base.* 428

CHAP. IV. *De l'Hyperbole, ou de la ligne qui représente la section d'un cône coupé par un plan parallele à son axe, ou même de maniere que coupant un seul côté dudit cône, il puisse aussi couper l'autre étant prolongé au-dessus de son sommet.* 443

FIN DE LA TABLE.

EX-

EXPLICATION DES TERMES & des Notes dont on se doit servir.

Axiome.

ON appelle *Axiome* une vérité claire & constante, qu'on connoit sans étude, dont tout le monde convient.

Demande ou *Proposition évidente.*

C'est une Proposition qui n'est pas connue avant qu'on l'étudie, mais qui le devient aussitôt qu'on y fait attention; qu'on a ainsi droit de demander qu'on reçoive comme inconteſtable. J'appelle plus volontiers *Proposition évidente*, ce qu'on nomme ordinairement *Demande*; parce que ce mot n'est gueres François dans le sens que lui donnent les Géometres.

Définition.

C'est une Proposition qui détermine l'idée d'un mot; ou qui donne une notion distincte de la chose qu'on veut que ce mot signifie.

Théorême.

On nomme ainsi une Proposition dont il faut démontrer la vérité.

Problême.

C'est aussi une Proposition qu'il faut démontrer; mais dans laquelle il s'agit de faire quelque chose, & de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit proposé de faire.

Lemme.

C'est une Proposition qui n'est au lieu où elle est, que pour servir de preuve à d'autres qui suivent.

Corollaire.

C'eſt une Propoſition qui n'eſt qu'une ſuite d'une autre précédente.

NOTES.

Cette marque + ſignifie *plus*. $A + B$, c'eſt *A plus B*.

Celle-ci — ſignifie *moins*. $A - B$, c'eſt *A moins B*.

∞ C'eſt la marque de l'*égalité*. $C \infty D$ ſignifie que *C* eſt *égal* à *D*. Mais l'on ſe ſert aujourd'hui plus communément de cette marque =. $C = D$, ſignifie que *C* eſt *égal* à *D*.

> *Plus grand.*

< *Plus petit.*

× *Par.* C'eſt le ſigne de la multiplication. Comme $A \times D$ ſignifie *A* multiplié par *D*.

ſup. Supra ou *ci-deſſus*.

l. Livre.

n. Nombre. On met des nombres dans les marges de cet Ouvrage, qui ſervent à trouver les Propoſitions qu'on allégue. l. 2. n. 6. c'eſt à dire: *Livre ſecond, nombre ſix.* Si l'endroit où l'on renvoye eſt du même livre, on cite le nombre précédent qui eſt à la marge avec cette note *ſup.* Ainſi *ſup. n.* 5. c'eſt-à-dire: *Ci-deſſus nombre cinquieme.*

Prop Propoſition. Lorſque la Propoſition qu'on fait ſe trouve dans Euclide, on marque l'endroit de cette maniere: *Eucl. I. prop.* 7. C'eſt-à-dire: *Euclide livre premier, propoſition ſeptieme.*

Les autres notes qui ſont dans l'Ouvrage ſont expliquées dans les lieux où l'on commence de s'en ſervir. Afin qu'on s'accoutume à l'uſage de ces notes; je m'en ſers ici en propoſant les véritez ſuivantes.

AXIO-

AXIOMES OU VERITEZ claires & connues.

Premier Axiome.

Le tout eſt plus grand que ſa partie.

Ainſi, ſi A & B ſont les parties d'une ligne que je nomme X ou de toute autre grandeur, ce tout X eſt plus grand que A & que B pris ſéparément. $X > A$, & $X > B$.

Second Axiome.

Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

Si A & B ſont toutes les parties de X, il eſt évident que $A + B$, c'eſt à-dire A avec B, eſt égal à X : Ce qui s'exprime ainſi $A + B = X$.

Troiſieme Axiome.

Les grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entre elles.

Suppoſé que $A = Z$ & $B = Z$; c'eſt-à-dire que A ſoit égal à Z & que B ſoit auſſi égal à Z; alors A & B ſont deux grandeurs égales. On exprime ainſi ce raiſonnement : Si $A = Z$ & $B = Z$; ou ce qui eſt la même choſe, ſi $A = Z = B$: donc $A = B$. Je me ſervirai ſouvent de cette expreſſion : qu'on y faſſe donc attention. On peut joindre à cet Axiome celui-ci qui n'eſt pas moins évident : Si A eſt égal à B, toute grandeur plus grande ou plus petite que B, ſera plus grande ou plus petite que A.

Quatrieme Axiome.

Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales, elles demeurent égales, les ſommes ſont égales.

Si $A = B$, ajoutant à A & à B la même grandeur X, ils demeurent égaux $A + X = B + X$.

Cinquieme Axiome.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront égaux.

Si $A=B$, donc $A-X=B-X$; c'eſt-à-dire, que ſi A & B ſont deux grandeurs égales, A moins X eſt égal à B moins X.

Sixieme Axiome.

Si à des grandeurs inégales on en ajoute d'égales, elles reſteront inégales, l'une plus grande ſi elle étoit plus grande, ou plus petite ſi elle étoit plus petite.

Si X & Z ſont des grandeurs inégales, & que A & B ſoient des grandeurs égales, $X+A$ & $Z+B$ ſeront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, ſelon ce qu'ils étoient auparavant.

Septieme Axiome.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront inégaux, l'un plus grand ſi la grandeur étoit plus grande, l'autre plus petit ſi la grandeur étoit plus petite.

C'eſt-à-dire, que ſi X & Z ſont des grandeurs inégales, $X-A$ & $Z-A$ ſeront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, ſelon ce que X & Z étoient auparavant.

Huitieme Axiome.

Une grandeur qui a le ſigne +, étant jointe avec elle-même ou avec ſon égale qui a le ſigne —, eſt égale à rien, ou à zero.

C'eſt-à-dire, $+A-A=0$.

Neuvieme Axiome.

Les choſes qui ſont moitié ou tiers &c. d'une même grandeur ou de grandeurs égales, ſont égales; mais elles ſont inégales, ſi les grandeurs entieres ſont inégales; plus grandes, ſi les grandeurs entieres ſont plus grandes; plus petites, ſi les grandeurs entieres ſont plus petites.

Dixie-

Dixieme Axiome.

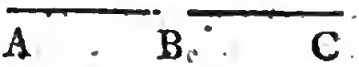
Les grandeurs qui conviennent étant poſées les unes ſur les autres, ſont égales.

Si deux lignes poſées l'une ſur l'autre conviennent, elles ſont égales.

On pourroit propoſer pluſieurs autres ſemblables Axiomes; c'eſt-à-dire pluſieurs autres véritez qu'on ne peut ignorer, & dont on ne diſpute point.

AVERTISSEMENT.

On pouroit joindre à ces Axiomes, c'eſt-à-dire, à ces véritez connues & inconteſtables, cette Propoſition, Qu'une choſe eſt vraye par ſa conſtruction, quand elle eſt faite exactement ſelon une règle dont on étoit convenu ainſi après qu'on eſt convenu de ce qu'il faut faire pour couper une ligne en deux parties égales, & qu'on a



ainſi coupé AC *au point* B, *alors par la conſtruction* AB & BC *ſont les moitiez de cette ligne.*

C'eſt auſſi une vérité, qu'une Propoſition eſt inconteſtable lorſqu'on ne la peut nier ſans dire une choſe abſurde, c'eſt-à-dire qui eſt manifeſtement fauſſe.

On réduit toutes les démonſtrations dont on ſe ſert, à ce petit nombre de véritez qu'on vient de propoſer, & aux notions claires & diſtinctes des choſes dont on doit parler. C'eſt dans la notion ou l'idée d'une choſe qu'on découvre ſes proprietez, & qu'on apperçoit ce qu'elle eſt véritablement; ainſi toute l'habileté d'un Auteur ne conſiſte que dans l'art, avec lequel il ſait faire attention à l'idée de la choſe qui fait le ſujet de ſon Livre; ne propoſant d'abord que ce qu'il y a

de

de plus ſimple & de plus aiſé à connoître dans ce ſujet, faiſant toujours préceder ce qui eſt néceſſaire pour entendre la ſuite, & ſans rien oublier dont la connoiſſance ſoit néceſſaire pour entendre ce qu'il propoſe. Mais comme l'attention eſt une choſe pénible; & que les démonſtrations longues, quoique d'ailleurs claires, ſont toujours difficiles; il doit s'accommoder à la foibleſſe de l'eſprit, & ménager ſa capacité. On l'accable lorſqu'on lui préſente pluſieurs choſes à la fois; il les faut donc partager en toutes leurs parties naturelles, de ſorte qu'on les puiſſe conſiderer les unes après les autres ſéparément & avec ordre, ce qui fait qu'on les conçoit & qu'on s'en ſouvient aiſément. C'eſt ce qu'on a tâché de faire. Les Maîtres le doivent faire remarquer à ceux à qui ils enſeigneront ces Elémens. Ils doivent en premier lieu leur en faire conſidarer le ſujet, la diſtribution de tout l'Ouvrage, le ſoin qu'on prend de donner des idées nettes des choſes qu'on veut faire connoître; & comme c'eſt de ces idées qu'ordinairement on tire les démonſtrations dont on ſe ſert, l'étude de ces Elémens faite avec ces réflexions pourra contribuer à former l'eſprit, & ſervira de modele de la maniere dont il faut étudier & traiter les Sciences; vue principale qu'on a ici, comme on l'a dit dans la Préface.

ELE-

ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
OU
DE LA MESURE
DE L'ETENDUE.

LIVRE PREMIER.

De la premiere eſpece d'Etendue, qui eſt la Longueur. Des Lignes droites & circulaires.

SECTION PREMIERE.

Des differentes eſpeces d'Etendue.

DEFINITION I.

I *L y a trois eſpeces d'étendue, la Longueur, la Largeur, & la Profondeur, qui ſont les trois dimenſions du corps.* 1

L'objet de la Géometrie n'eſt pas cette étendue matérielle des corps, qui ſont effectivement étendus en long, en large, & en profondeur; c'eſt une étendue intelligible, telle

que l'eſprit la conçoit; en ſorte que quand il n'y auroit point de corps au monde, ce que les Géometres démontrent de l'étendue n'en ſeroit pas moins vrai; & c'eſt pour cela que quoique les corps changent, les vérités de Géometrie ſont immuables, parce qu'elles ne dépendent point de la matiere, mais des notions claires qui ſont dans l'eſprit. Ainſi quoiqu'il n'y ait point de corps ſans trois dimenſions, on peut conſiderer l'une ſans faire attention à l'autre, la longueur ſans conſiderer la largeur, & la largeur ſans conſiderer la profondeur, comme l'on regarde la longueur des chemins ſans faire réflexion ſur leur largeur, & leur largeur ſans penſer à la profondeur de la terre. La notion de la longueur exclud celle de la largeur & de la profondeur, & celle de la largeur exclud celle de la profondeur; & ces notions ne ſont point fauſſes, quoiqu'effectivement ces trois choſes ſoient inſéparables; parce que dans la maniere dont elles ſont conçues, elles ſont diſtinguées en ce que l'une eſt conſiderée ſans l'autre. Ainſi les Géometres peuvent ſuppoſer en cette maniere des Etres qui ſoient longs ſans être larges, & qui ſoient larges ſans être profonds ou épais; & quand on voudroit ſoutenir que ces ſuppoſitions ſont entierement fauſſes, les conſéquences qu'on en tire ne pourroient être rejettées comme fauſſes. Car par exemple, bien qu'il n'y ait point de cercle parfait dans le monde, il eſt évident que ſelon qu'on ſuppoſe que le cercle eſt une figure dont la circonference eſt en toutes ſes parties également éloignée du centre, il faut que toutes les lignes tirées du centre du cercle à la circonference ſoient égales.

DE-

DEFINITION II.

Le point eſt ce qui n'a aucune partie. 2

C'eſt-à-dire, dont on ne conſidere point les parties; car tout ce qui eſt étendu a des parties. Or ſi le point n'eſt pas un rien, il eſt étendu; ainſi on ne dit qu'il eſt ſans parties, que parce qu'on ne fait point attention à celles qu'il peut avoir, & qu'on le conſidere comme indiviſible.

DEFINITION III.

La ligne eſt une longueur ſans largeur. 3

C'eſt-à-dire une étendue dont on ne conſidere point la largeur, ou qu'on ſuppoſe n'avoir point de largeur. On peut concevoir que la ligne eſt la trace, ou l'écoulement d'un point qui ſe meut, ou qui change de place. Il y a de deux ſortes de lignes, la ligne droite, & la ligne courbe.

DEFINITION IV.

La ligne droite eſt celle qui eſt la plus courte qui puiſſe être menée entre deux points donnés. 4

On peut dire que c'eſt la trace que laiſſe un point qui ſe meut par le plus court chemin.

DEFINITION V.

La ligne courbe eſt celle qui n'eſt pas la plus courte de toutes celles qu'on peut mener entre deux points. 5

Il y a des lignes courbes d'une infinité d'eſpeces, de régulieres, & d'irrégulieres, de géometriques, & de méchaniques, mais dont on ne parlera point dans ces Elémens. On appelle lignes creuſes celles qui ſont compoſées de deux ou de pluſieurs lignes, comme *A* & *B*. La ligne *A* faite de deux lignes, & la ligne *B* faite de pluſieurs lignes, ne

peuvent être conſiderées comme une ſeule ligne droite. Ainſi pour les diſtinguer il faut les nommer creuſes.

Definition VI.

6 *La Surface eſt une étendue longue & large ſans profondeur.*

C'eſt-à-dire une étendue longue & large, dont on ne conſidere point la profondeur.

Definition VII.

7 *La Surface droite ou plane, eſt celle qui eſt la plus courte entre deux lignes droites.*

On peut concevoir qu'une ſurface droite eſt faite par le mouvement d'une ligne droite.

Definition VIII.

8 *Surface courbe, celle qui eſt plus grande entre deux mêmes lignes, qu'une ſurface droite ou plane.*

Definition IX.

9 *Le Solide eſt une étendue qui a trois dimenſions, de la longueur, de la largeur & de la profondeur.*

Le ſolide eſt l'écoulement de la ſurface. Tout ſolide eſt un corps; entant qu'on prend ce nom pour ce qui eſt étendu, qui a de la longueur, de la largeur, & de la profondeur. Etre étendu, & être corps, c'eſt la même choſe, lorſque l'on ne conſidere dans les corps que leur extenſion, & qu'on ne fait aucune attention à leurs qualités ſenſibles, à la couleur, à l'odeur, & aux autres qualités qu'ils peuvent avoir.

SEC-

SECTION II.

De la longueur, qui eſt la premiere & la plus ſimple dimenſion du corps.

Des Lignes droites.

Propoſitions évidentes touchant les lignes droites, ou Corollaires de leur définition.

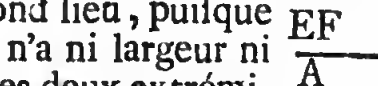
AVERTISSEMENT.

Ces propoſitions ſont renfermées dans l'idée de la ligne droite; c'eſt-à-dire qu'on ne peut concevoir une ligne droite, qu'en même tems on n'apperçoive qu'elle n'eſt pas ce qu'on ſuppoſe qu'elle eſt, ſi ce qu'on va dire n'eſt pas vrai. Les Géometres ſuppoſent toutes ces propoſitions ſans le dire. Je les exprime, parce qu'elles feront que les notions de la ligne droite, d'où l'on doit tirer la démonſtration de ſes proprietés, ſeront plus claires. Ces avis eſt pour toutes les propoſitions évidentes que je propoſerai ſur chaque ſujet avant les Théorêmes Il n'y a rien de plus important que d'avoir des notions claires & exactes des choſes dont on recherche les proprietés.

PROPOSITION I.

LEs extrémités d'une ligne ſont deux points. 10

Les extrémités de la ligne *X* ſont *A* & *B* qui ſont indiviſibles, premierement, quant à leur longueur; car ſi *A* avoit deux parties, par exemple *E* & *F*, ce ſeroit *F* qui ſeroit l'extrémité. En ſecond lieu, puiſque cette ligne *X* n'a ni largeur ni profondeur, les deux extrémités *A* & *B* n'ont ni largeur ni profondeur.

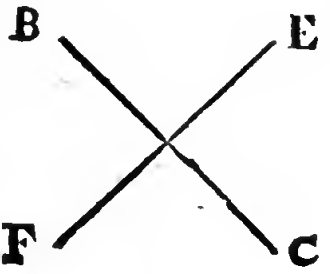


Etant donc indiviſibles en tous ſens, ce ſont deux points: *

PROPOSITION II.

11 *Lorſque deux differentes lignes ſe coupent, leur ſection eſt un point indiviſible.*

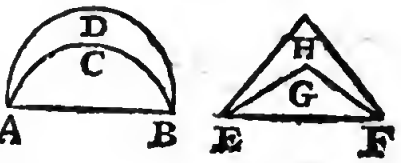
La ligne *EF* coupe *BC*, ſi elle la coupe en deux differens points, cette ligne *EF* a de la largeur, ce qui eſt contre la définition de la ligne droite; la ſection de *BC* & d'*EF* eſt donc un point.



PROPOSITION III.

12 *Une ligne menée entre deux points, laquelle s'écarte d'une part ou de l'autre d'une ligne droite menée entre ces deux mêmes points, eſt plus grande que cette ligne droite.*

Les lignes courbes *ACB* & *ADB* ſont plus grandes que *AB*, & les lignes creuſes *EFG* & *EHF* ſont plus grandes que *EF*. C'eſt une ſuite de la notion de la ligne droite, qui eſt la plus courte qu'on puiſſe mener entre deux points.



PROPOSITION IV.

13 *Deux points étant donnés, on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.*

L'inſtrument dont on ſe ſert pour mener une ligne droite eſt une règle. Pour connoître ſi une règle eſt bonne, on tire avec elle une ligne, à laquelle on l'applique en differens ſens; & ſi après cela on trouve qu'elle convient toujours avec cette ligne, on juge qu'elle eſt juſte. Un moyen ſûr pour mener une ligne droite eſt de ſe ſervir d'un

* *ſup. n.* 2.

d'une filet fort ſubtil, comme pourroit être un cheveu; car après l'avoir tendu entre deux points autant qu'on le peut ſans le rompre, ſelon la notion de la ligne droite, il marquera une ligne droite entre ces deux points.

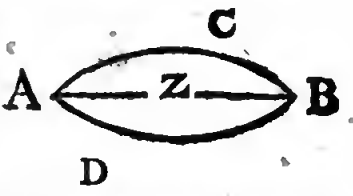
Proposition V.

Une ligne droite étant donnée, on la peut prolonger. Elle ne peut être prolongée du même côté vers deux differens points. 14

On prolonge une ligne par le moyen d'une règle.

Proposition VI.

Entre deux mêmes points on ne peut mener qu'une ligne droite. 15



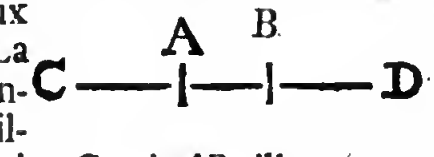
Si on peut mener pluſieurs lignes droites entre *A* & *B* autres que la ligne *Z*, il faut qu'elles s'écartent ou vers *C* ou vers *D*: ainſi elles ſeront plus longues que *Z*, par conſéquent elles ne ſeront pas droites * puiſqu'une ligne entre *A* & *B* ne peut être droite, qu'elle ne ſoit la plus courte de toutes les lignes qu'on puiſſe mener entre ces deux points. On ne peut donc mener qu'une ſeule ligne droite entre *A* & *B*. On pourroit concevoir pluſieurs lignes entre deux points couchées les unes ſur les autres, mais elles ne ſeroient qu'une même ligne. Entre deux mêmes points on peut mener une infinité de differentes lignes courbes. C'eſt pourquoi lorſqu'il s'agit de meſurer la diſtance d'un point à un autre point, on ne prend pas pour meſure une ligne courbe, mais une ligne droite.

* n. 4.

PROPOSITION VII.

16 *Deux lignes droites qui ont deux points communs, ne ſont qu'une même ligne droite.*

La ligne *BC* & la ligne *AD* ont deux points communs, ſavoir *A* & *B*, entre leſquels on ne peut concevoir qu'une ligne droite. Ainſi *AB* & *BA* ne ſont point deux differentes lignes. La ligne *BA* étant prolongée ne peut aller ailleurs qu'au même point *C*, ni *AB* ailleurs que vers *D*, lorſqu'on la prolonge; partant *AD* avec *BD* ne font qu'une même ligne droite; car entre *C* & *D* il n'y a qu'une ſeule ligne droite.



PROPOSITION VIII.

17 *Donc, la poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points.*

Car ſi par les deux points donnés *A* & *B* l'on mene une ligne droite, elle ſera celle que l'on cherche, puiſqu'on ne peut mener par deux points pluſieurs differentes lignes droites, toutes celles qui ont deux points communs n'étant qu'une même ligne, par la propoſition précédente.

PROPOSITION IX.

18 *Deux lignes droites qui ſe croiſent, ou qui ſe coupent, ne ſe peuvent rencontrer que dans ce ſeul point où elles ſe coupent.*

Car ſi elles ſe rencontroient en deux points, elles ne ſeroient qu'une même ligne, par la ſeptieme propoſition; ainſi elles ne ſeroient pas differentes l'une de l'autre, comme le ſont deux lignes qui ſe croiſent & qui ſe coupent.

PROPOSITION X.

19 *La partie d'une ligne droite, eſt une ligne droite.*

Qui

Qui dit partie d'une ligne droite, ne dit pas ſeulement un point.

SECTION III.

De la Ligne qui eſt circulaire.

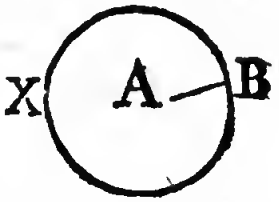
AVERTISSEMENT.

Le nombre des differentes eſpeces de lignes courbes étant infini, je ne conſidere ici que la ligne courbe qui eſt circulaire, laquelle, après la ligne droite, eſt la plus ſimple & la plus aiſée à connoitre.

DEFINITION I.

UNe ligne ſur un plan, laquelle n'a ni commencement ni fin, & qui dans toutes ſes parties eſt également éloignée d'un même point, eſt un cercle. Ce point dont toutes les parties de cette ligne ſont également éloignées, s'appelle le centre du cercle. 20

Concevons que dans la ligne *AB* l'extrémité *A* eſt immobile, pendant que *B* l'autre extrémité tourne; ſi *B* laiſſe une trace, ce ſera un cercle dont toutes les parties ſont éloignées du point *A* d'un intervalle égal; ſavoir *AB*. Ainſi *A* eſt le centre. Cette maniere dont un cerle ſe fait eſt ſi uniforme, qu'on ne peut concevoir aucune difference entre toutes ſes parties.



DEFINITION II.

Le cercle, conſideré comme une ſurface, en eſt une au dedans de laquelle il y a un point également éloigné de ſes bornes. 21

DEFINITION III.

22 *La ligne qui borne la ſurface d'un cercle, ou le cercle conſideré comme ligne, s'appelle circonference.*

DEFINITION IV.

23 *Les lignes qui traverſent la ſurface d'un cercle & paſſent par le centre, s'appellent diametres.*

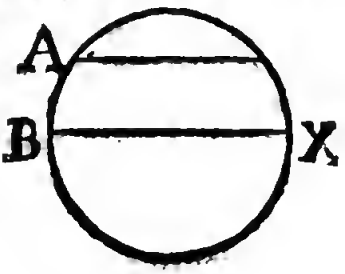
DEFINITION V.

24 *Les lignes qui partent du centre & ſe terminent à la circonference, ſe nomment rayons, ou demi-diametres.*

AB eſt un rayon du cercle *X*. [*fig. ſup. n.* 20.]

DEFINITION VI.

25 *Les lignes qui ſe terminent à la circonference ſans paſſer par le centre, ou qui ſont menées d'un point de la circonference à un autre de ſes points, ſe nomment cordes.*



A eſt une corde du cercle *X*. dont *B* qui paſſe par le centre eſt le diametre.

DEFINITION VII.

26 *La partie de la circonference qui ſe trouve entre les extrémités d'une corde, s'appelle arc.*

Lorſqu'une corde comme eſt *A* dans le cercle *X*, ne paſſe pas par le centre, il y a deux portions de circonference, qui ſe terminent aux extrémités de cette corde, l'une plus grande, l'autre plus petite. Quand on parle de la corde d'un arc, ſi l'on n'ajoute autre choſe, on entend l'arc qui n'eſt pas le plus grand.

DEFINITION VIII.

27 *Toute circonference ſe conçoit diviſée en trois-cens-ſoixante parties égales, qui ſe nomment degrés.*

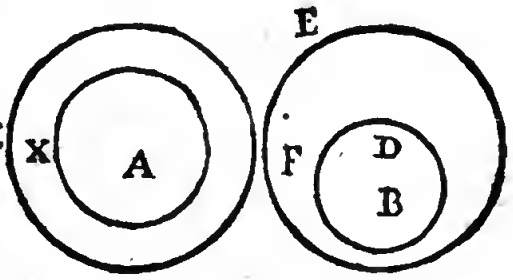
DEFINITION IX.

28 *Chaque degré ſe diviſe en ſoixante minutes, ou pe-*

petites parties, qu'on appelle premieres. Chaque minute ou premiere en ſoixante ſecondes, & chaque ſeconde en ſoixante tierces: ainſi à l'infini.

DEFINITION X.

Cercles concentriques, ſont ceux qui ſont décrits 29
d'un même centre. Excentriques, qui n'ont pas même centre.



Z & *X* qui ont pour centre le même point *A*, ſont concentriques, & les cercles *E* & *F*, qui ont pour centres *D* & *B* deux points differens, ſont excentriques.

Propoſitions évidentes touchant la ligne circulaire.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces propoſitions ſont des conſéquences claires de la définition du cercle.

PROPOSITION I.

Un intervalle étant donné, on peut décrire une 30
circonference. Eucl. Liv. I. Pr. 2. & 3. Liv. IV. Prop. 1.

L'inſtrument dont on ſe ſert ordinairement pour décrire un cercle, eſt un compas; avec lequel on peut, comme il eſt évident, prendre une ligne égale à une autre ligne donnée; & de deux lignes inégales retrancher de la plus grande une ligne égale à la plus petite. Ce qui fait la deuxieme & la troiſieme propoſition du premier d'Euclide, & la premiere du quatrieme.

PROPOSITION II.

31 *Dans un même cercle ou dans les cercles égaux, les arcs égaux ont des cordes égales, & les cordes égales ſont les cordes d'arcs égaux.* Eucl. III. Pr. 24.

C'eſt une ſuite de la ſimplicité & uniformité du cercle: toutes ſes parties étant faites de même maniere, on ne peut concevoir aucune difference entre elles.

PROPOSITION III.

32 *Dans les mêmes cercles, ou dans les cercles égaux, les plus grandes cordes ſoutiennent les plus grands arcs, & les plus grands arcs ont de plus grandes cordes.* Eucl. III. Prop. 28 & 29.

PROPOSITION IV.

33 *Les arcs d'un pareil nombre de degrés ſont plus grands dans les plus grands cercles, & plus petits dans les plus petits cercles.*

Cela eſt évident, car les parties d'un plus grand tout doivent être plus grandes. La centieme partie d'une toiſe eſt plus grande que la centieme partie d'un pied.

PROPOSITION V.

34 *Les arcs d'un pareil nombre de degrés ont de plus grandes cordes dans les grands cercles, & de plus petites dans les plus petits cercles.*

C'eſt encore une ſuite de la ſimplicité & uniformité du cercle. Tout doit être plus grand dans un plus grand cercle, le diametre, le rayon & la corde de tel & tel degré.

PROPOSITION VI.

35 *Le diametre coupe le cercle en deux parties égales, qui s'appellent demie circonférence.*

On ne pourroit concevoir que le cercle fût uniforme en toutes ſes parties, ſi cela n'étoit vrai.

PRO-

PROPOSITION VII.

Toutes les lignes tirées du centre à la circonference étant égales, tous les rayons étant égaux: celles qui ſont plus petites que les rayons, ont leur extrémité au dedans du cercle: ſi elles ſont plus longues, elles l'ont au dehors: ſi égales, dans la circonference même. 36

Cela eſt évident, puiſque la circonference eſt en toutes ſes parties également éloignée du centre de l'intervalle du rayon.

PROPOSITION VIII.

Les cercles ſont égaux dont les rayons ſont égaux. 37

C'eſt la longueur du rayon qui fait que le cercle eſt plus grand ou plus petit.

PROPOSITION IX.

Deux cercles qui ont un même centre & un même rayon, ne ſont pas differens. 38

Comme deux lignes droites entre deux mêmes points ne ſont qu'une ligne.

SECTION IV.

De la differente poſition de deux lignes droites au regard l'une de l'autre.

AVERTISSEMENT.

Deux lignes droites ne peuvent être diſpoſées qu'en ces trois manieres; ou elles ſe rencontrent, ou elles ſe coupent, ou elles ne ſe rencontrent point. Quand elles ſe rencontrent, elles le peuvent faire de ſorte, que l'une panche plus vers un côté que vers l'autre, ou qu'elle ne panche pas plus. On conſidere ici ces trois poſitions.

DES LIGNES PERPENDICULAIRES.

DEFINITION.

UNe *ligne qui tombe ſur une autre ligne, ou qui la coupe de ſorte qu'elle ne panche pas* 39

plus vers un côté de cette ligne qu'elle coupe que vers l'autre, s'appelle perpendiculaire.

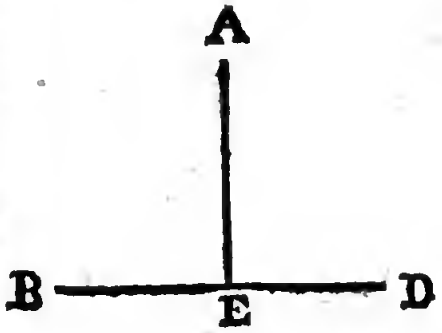
Propoſitions évidentes touchant les lignes perpendiculaires.

AVERTISSEMENT.

Je ne fais ces propoſitions que pour rendre plus diſtincte la notion, que la définition précédente vient de donner de la ligne perpendiculaire.

PROPOSITION I.

40 *Une ligne tombant ſur le milieu d'une autre ligne, ſi ſon ſommet eſt également éloigné des extrémités de celle-ci, elle ne panche pas plus d'un côté que d'autre, ainſi elle eſt perpendiculaire.*



AE tombe ſur *E* le milieu de *BD*. Si *A* ſon ſommet eſt également éloigné des extrémités *B* & *D* de la ligne *BD*, elle eſt perpendiculaire ſur *BD*. C'eſt une ſuite de la notion de la ligne perpendiculaire que donne la définition précédente.

PROPOSITION II.

41 *Si deux points dans une ligne ſont également diſtans des extrémités de la ligne ſur laquelle elle tombe, chaque point de cette premiere ligne ſera également diſtant des mêmes extrémités de la ſeconde ligne.*

Si les deux points *A* & *E* de la ligne *AE* ſont également diſtans de *B* & de *D*, tous les autres points de *AE* ſeront également diſtans de *B* & de *D*. C'eſt une ſuite de ce que la poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points. On ne peut concevoir que quelque point dans la ligne

gne *AE* ſoit plus près de *B* que de *D*, qu'on ne conçoive que *AE* ſe courbe en ce point du côté de *B*; & qu'ainſi elle n'eſt pas une ligne droite, comme on le ſuppoſe.

PROPOSITION III.

Dans une perpendiculaire, ſi l'un de ſes points eſt également éloigné de deux autres points de la ligne ſur laquelle elle eſt élevée, tous ſes autres points ſont également éloignés de ceux-ci. 42

Si *AE* eſt perpendiculaire ſur *BD* & que l'un de ſes points *A* ou *E* ſoit également diſtant de *B* & de *D*, l'autre ſera également éloigné des mêmes points *B* & *D*. Car ſi *A* eſt également diſtant de *B* & *D*, & que *E* ne le ſoit pas, alors *AE* panchera plus d'un côté que d'autre; ainſi elle ne ſera pas perpendiculaire, contre la ſuppoſition qu'on fait qu'elle l'eſt.

PROPOSITION IV.

Pour démontrer donc qu'une ligne eſt perpendiculaire ſur une autre, il ſuffit de faire voir que deux de ſes points ſont chacun en égale diſtance de deux points de celle-ci. 43

Pour démontrer que *AE* eſt perpendiculaire ſur *BD*, il ſuffit de prouver que ſes points *A* & *E* ſont chacun également éloignés de *B* & de *D*.

PROPOSITION V.

Le prolongement d'une ligne perpendiculaire ſur une autre ligne, eſt une perpendiculaire ſur celle-ci. 44

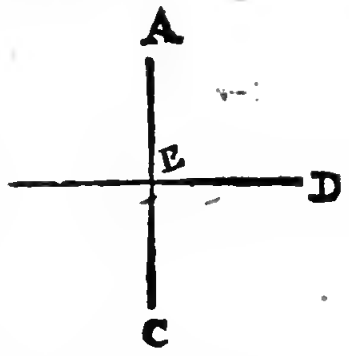
AE eſt perpendiculaire ſur *BD*; ſon prolongement **EC* eſt perpendiculaire ſur *BD*; car ce n'eſt qu'une même ligne droite, & l'on ne peut pas concevoir la choſe autrement, à moins que *AC* ne ſe courbe vers *B* ou vers *D*.

PROPOSITION VI.

Deux lignes ſont perpendiculaires l'une ſur l'autre, ſi l'une l'eſt ſur l'autre. 45

* Voy. la Fig. ſuivante.

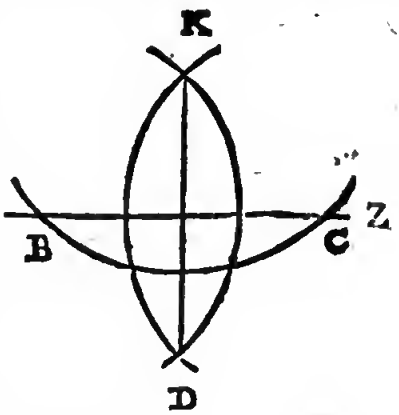
Si



Si *AC* eſt perpendiculaire ſur *BD*, la ligne *BD* eſt perpendiculaire ſur *AC*. On ne peut concevoir que *B* panche plus vers *A* que vers *C*, qu'en même tems on ne conçoive que *D* panche plus vers *C*; & cela étant, *A* panchera plus vers *B* que vers *D*, car cela eſt réciproque. Ainſi *AE* ne ſeroit pas perpendiculaire ſur *BD*, contre la ſuppoſition. *BD* eſt donc perpendiculaire ſur *AC*, comme *AC* eſt perpendiculaire ſur *BD*.

PROBLEME I.

46 *D'un point donné hors d'une ligne tirer ſur elle une perpendiculaire.* Eucl. I. Prop. 12.



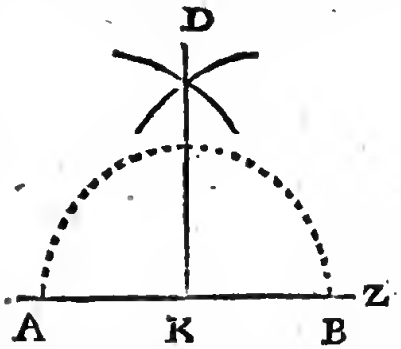
Du point *K* hors de la ligne *Z* il faut tirer une perpendiculaire ſur *Z*. 1°. De *K* comme centre je décris l'arc *BC*, ainſi *B* & *C* qui ſont dans la circonference de ce cercle & dans la ligne *Z*, ſont également éloignés de *K*. 2°. De *C* comme centre & de l'intervalle *CK* je décris un cercle, & du point *B* un ſecond du même intervalle. Ces deux cercles ſe coupent aux points *K* & *D* qui ſont ainſi également diſtans de *B* & de *C*. 3°. Par *K* & *D* je mene une ligne droite, dans laquelle les deux points *K* & *D* étant par la conſtruction également éloignés de *B* & de *C*, il faut

faut, comme on l'a dit*, que cette ligne *KD* ſoit perpendiculaire ſur *Z*; ce qu'il faloit faire.

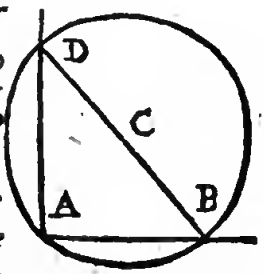
Probleme II.

Sur le point donné d'une ligne élever une perpendiculaire. Eucl. I. Prop. 11.

Soit *K* un point dans la ligne *Z*. Il faut élever ſur elle au point *K* une perpendiculaire. 1°. De *K* comme centre je décris un cercle qui coupe *Z* en deux points, qui ſont ici *A* & *B*. 2°. De ces deux points *A* & *B* comme centres, je décris deux autres cercles d'un même intervalle pris à diſcretion, de ſorte que ces deux cercles ſe coupent. Je ſuppoſe que ce ſoit au point *D*. 3°. Je mene de ce point *D* une ligne au point *K*, qui eſt la perpendiculaire que l'on cherche. Car par la conſtruction, *D* eſt également éloigné de *A* & de *B*, dont le point *K* eſt auſſi également éloigné par la conſtruction; ainſi cette ligne ayant deux de ſes points également éloignés de *A* & de *B*, elle eſt perpendiculaire ſur *Z*. †.



Lorſque le point donné eſt ſur l'extrémité de la ligne donnée, comme eſt A, *je prends à diſcretion le point* C, *& ouvrant le compas de l'intervalle* AC *je décris un cercle, & je mene le diametre* BD, *& du point de ſection* D, *je tire une autre ligne au point* A, *qui ſera la perpendiculaire qu'on vou-*



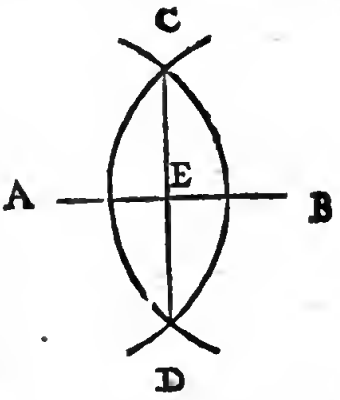
* *ſup.* n. 43. † *ſup.* n. 43.

vouloit élever ; ce qu'on ne peut démontrer en ce lieu.

COROLLAIRE.

48 *De-là nous apprenons comment l'on peut couper une ligne en deux parties égales.* Eucl. I. Pr. 10.

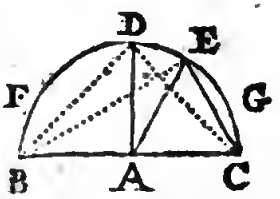
Soit *AB* une ligne droite ; de *A* & de *B* comme centres, je fais d'un même intervalle pris à discretion deux cercles qui se coupent en *C* & *D*, par où je mene une ligne qui est perpendiculaire sur *AB*, *puisque *D* & *C* sont également éloignés de *A* & de *B*. Or le point *E* commun aux deux lignes *DC* & *AB*, est également éloigné de *A* & de *B*†, ainsi *AE* est égal à *EB* ; par conséquent la ligne *AB* est coupée par la moitié.



THEOREME I.

49 *On ne peut élever sur un même point dans une ligne plus d'une perpendiculaire.*

AD est perpendiculaire sur la ligne *BC*. Il faut démontrer qu'on ne peut élever sur le point *A* une autre ligne qui soit perpendiculaire : que par exemple *AE* & toute autre ligne ne le peut être.



De *A* comme centre, je décris le cercle *BFD EGC*. Ainsi *B* & *C* sont également distans de *A*. Et *D* où ce cercle coupe la perpendiculaire est également éloigné de *B* & de *C*. ‡ Donc *DB* = *DC*, ainsi les deux arcs *BFD* & *CGD* sont égaux ‡, par conséquent *D* est le milieu de l'arc *BFDEGC*. Si *EA* est perpendiculaire, par les mê-

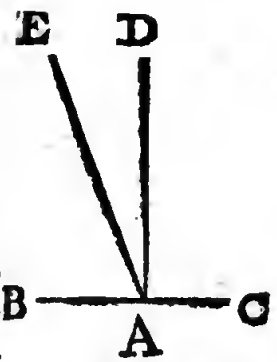
* *sup.* n. 43. † *sup.* n. 41. ‡ *sup.* n. 42. ‡ *sup.* n. 31.

mêmes raiſons $BE=CE$ & $BFDE=CGE$; par conſéquent E eſt auſſi le milieu de $BFDEGC$, ainſi $BFD=BFDE$ ce qui eſt abſurde.

THEOREME II.

Une ligne tombant perpendiculairement ſur le milieu d'une autre ligne, paſſe par tous les points également éloignés des extrémités de cette autre ligne. 50

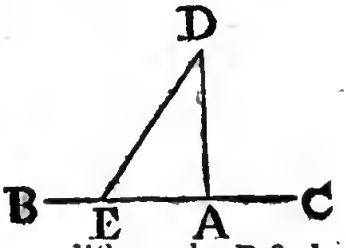
La ligne AD tombe perpendiculairement ſur A, milieu de BC. Il faut prouver qu'elle paſſe par tous les points également éloignés de B & C, les extrémités de BC. Si on le conteſte & qu'on veuille dire que le point E, par où AD ne paſſe pas, eſt également éloigné de B & de C, de ce point ſoit mené une ligne droite au point A, qui ſera perpendiculaire ſur BC, puiſqu'en deux de ces points A & E, elle eſt également éloignée de B & de C*. Or il ne ſe peut faire par le Theorême précédent, que ſur le point A, il y ait deux perpendiculaires: il n'eſt donc pas vrai que le point E ſoit également éloigné de B & de C.



THEOREME III.

On ne peut mener plus d'une perpendiculaire d'un même point ſur une même ligne. 51

La ligne AD tombe perpendiculairement ſur le milieu de la ligne BC, je dis qu'on ne peut du même point D mener une autre perpendiculaire ſur BC; car cette ligne tomberoit de part ou d'autre de A; que ce ſoit en E: Alors le point E eſt également diſtant de B & de C:



* *ſup. n.* 43.

C * : donc *BE* eſt moitié de cette ligne. Mais *AB* en eſt auſſi la moitié, ainſi *BA* = *BE*; ce qui eſt abſurde. Donc, &c.

THEOREME IV.

52 *Dans un plan, deux lignes qui ſont perpendiculaires ſur une troiſieme, ne ſe peuvent rencontrer.*

Car ſi elles ſe rencontroient ou ſe coupoient, du point de cette rencontre ou ſection il y auroit deux perpendiculaires ſur la même ligne; ce qu'on vient de démontrer impoſſible.

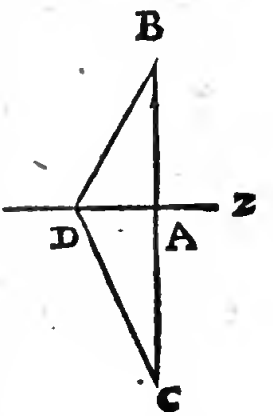
AVERTISSEMENT.

L'on meſure la diſtance d'un point à une ligne par une perpendiculaire, parce que c'eſt la meſure la plus ſimple & la plus conſtante; puiſqu'on ne peut mener d'un point à une ligne qu'une ſeule perpendiculaire, & qu'outre cela elle eſt plus courte que toute autre ligne qu'on puiſſe tirer du même point à la même ligne, comme on le va faire voir dans le Théorême ſuivant.

THEOREME V.

53 *La perpendiculaire eſt la plus courte de toutes les lignes qu'on puiſſe mener d'un point à une ligne.*

La ligne *BA* eſt perpendiculaire ſur *Z*, il faut démontrer qu'elle eſt la plus courte de toutes les lignes qui puiſſent être menées du point *B* ſur la ligne *Z*.



Prolongez *BA* juſqu'en *C*, en ſorte que *BA* ſoit égal à *AC*; la ligne *DA* eſt perpendiculaire ſur *BC* comme *BC* l'eſt ſur *AD* †. Le point *D* eſt donc également éloigné de *B* & de *C* ‡, ainſi *BD* eſt égal à *DC*; mais la ligne droite *BC* eſt plus courte que la ligne *BD*

* *ſup. n.* 42. † *ſup. n.* 45. ‡ *ſup. n.* 42.

$BD + DC$ *. Par conſéquent AB, moitié de BC, eſt plus courte que BD moitié de $BD + DC$: ce qu'il faloit démontrer.

C'eſt une ſuite de la nature de la perpendiculaire, qui ne s'écartant point, & s'éloignant également des extrémités de la ligne, ſur le milieu de laquelle elle tombe, va par le chemin le plus droit, & par conſéquent le plus court.

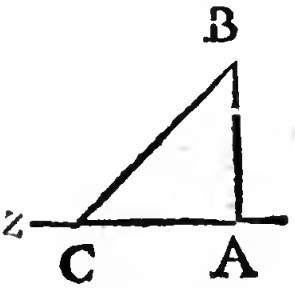
DES LIGNES OBLIQUES.

DEFINITION I.

Les lignes qui panchent plus vers un côté que 54
vers l'autre de la ligne qu'elles rencontrent, s'appellent obliques.

DEFINITION II.

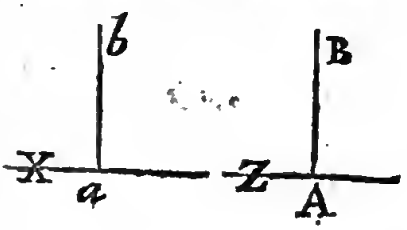
BC *eſt une ligne oblique ſur* Z; *ayant mené de* B 55
ſon extrémité, la perpendiculaire AB, *la ligne* AC *entre* A, *pied de la perpendiculaire, &* C *le pied de l'oblique, eſt l'éloignement du perpendicule, & cet éloignement eſt la meſure de l'obliquité de* BC. *Ainſi une ligne eſt plus oblique, lorſque ſon éloignement du perpendicule eſt plus grand.*



LEMME I.

Deux lignes droites, qui ont ſur elles chacune une 56
perpendiculaire, étant poſées l'une ſur l'autre, de ſorte que les pieds de ces perpendiculaires ſoient l'un ſur l'autre, ces deux perpendiculaires conviendront.

AB eſt perpendiculaire ſur Z, & ab ſur X. Il faut prouver que ſi l'on poſe X ſur Z de ſorte que a ſoit mis ſur A, les deux



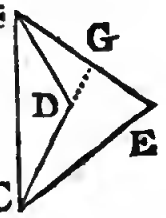
* *ſup. n.* 12.

per

perpendiculaires *AB* & *ab* conviendront. Car puiſqu'après cette ſuperpoſition, *Z* & *X* ne ſont plus qu'une ligne, *AB* ſera perpendiculaire ſur l'une & ſur l'autre, comme auſſi *ab*. Donc ſi *AB* & *ab* ne convenoient pas, il y auroit deux perpendiculaires ſur une même ligne au même point; ce qui eſt impoſſible. *

LEMME II.

57 *Si des extrémitez d'une ligne l'on en mene quatre autres, dont deux ſe joignent dans un point plus proche de la ligne donnée que les deux autres, je dis que la ſomme des deux dernieres ſera plus grande que la ſomme des deux autres.* Eucl. I. prop. 21.



Soit la ligne donnée *BC*, & des points *B* & *C* ſoient menées les deux lignes *BD*, *CD*, & les deux autres *BE*, *CE*. Je dis que *BE* + *CE* eſt plus grande que *BD* + *CD*.

1°. La ligne droite entre deux points étant la plus courte, † *CE* + *EG* eſt plus grand que *CD* + *DG*, & par la même raiſon *BG* + *GD* eſt plus grand que *BD*. Donc *CE* + *EG* + *GD* + *BG* eſt plus grand que *CD* + *DG* + *BD*. Otant de part & d'autre *DG*, ſelon l'Axiome 7. le reſte *CE* + *EG* + *BG* ou *CE* + *EB* ſera plus grand que *BD* + *DC*; ce qu'il faloit prouver.

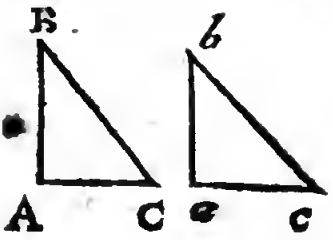
THEOREME I.

58 *S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'éloignement du perpendicule, les lignes obliques ſont égales.*

AB eſt perpendiculaire ſur *AC*, & *ab* ſur *ac*. Ces deux perpendiculaires ſont égales; comme auſſi *AC* éloignement du perpendicule *AB* eſt égal

* *ſup. n.* 49. † *ſup. n.* 12.

égal à *a c* éloignement du perpendicule *a b*. Il faut prouver que $BC = bc$.

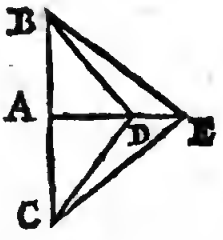


Par le premier Lemme, ayant posé *ac* sur *AC* deux lignes égales, la perpendiculaire *ab* conviendra avec la perpendiculaire *AB*, qui étant égales, *b* conviendra avec *B*, & *c* avec *C*; ainsi *b c* avec *B C*; ce qu'il faloit démontrer.

Theoreme II.

Les lignes obliques menées du même point à une même ligne sont plus longues, si elles sont plus éloignées de la perpendiculaire. 59

Il faut prouver que *B E* est plus longue que *BD*. Pour cela soit prolongé *B A* jusqu'à *C*, de sorte que $AB = AC$. Alors, *$BD = DC$ & $BE = EC$. Or $BE + EC$ est plus grande que $BD + DC$ par le II. Lemme: Donc *BE* moitié de $BE + EC$ est plus grande que *BD* moitié de $BD + DC$, selon l'Axiome neuvieme.



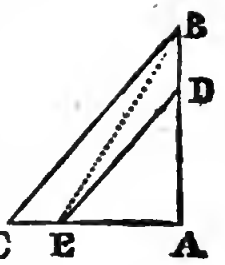
Theoreme III.

Une ligne oblique est plus grande, dont la perpendiculaire, & l'éloignement du perpendicule, sont plus grands: & si l'éloignement du perpendicule est le même & l'oblique plus grande, la perpendiculaire est plus grande. 60

Soient 1°. *BC* & *DE* † deux lignes obliques, la perpendiculaire *AB* est plus grande que *AD*; & *AC* l'éloignement du perpendicule de *BA*, est plus grand que *AE* celui de *DA*: je dis que l'oblique *BC* est plus grande que l'oblique *DE*. Car par le Théorême précédent, *AB* est plus grande que *BE*; & puisque *AC* est perpendi-

* *Sup.* n. 58. † Voy. la Fig. suiv. cu-

culaire sur AB, par le même Théorême, BE est plus grande que DE: par conséquent BC plus grande que BE, sera encore plus grande que DE.

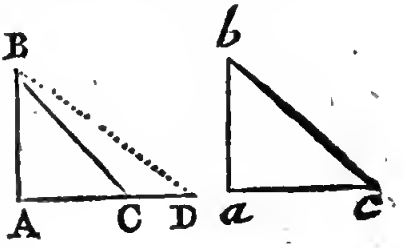


2°. AE est le même éloignement: je dis que si BE est plus grande que DE, la perpendiculaire AB est plus grande que la perpendiculaire AD. Car si AD étoit plus grand que AB, ou égal, alors par le précédent Théorême, ou par le premier, BE seroit plus petit que DE, ou égal l'un & l'autre, contre la supposition qu'on fait que BE est plus grande.

THEOREME IV.

61 *S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans la ligne oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule.*

Soit $AB=ab$, & $BC=bc$. Il faut prouver que $AC=ac$. Ayant posé ab sur AB, ces deux lignes égales conviendront entierement; & par le premier Lemme, la perpendiculaire ac conviendra au moins en partie avec la perpendiculaire AC. Si $AC \angle ac$, & qu'ainsi c ne convienne pas avec C, mais avec D, alors bc conviendra avec BD; mais $BD > BC$ *, ce qui est contre ce qu'on suppose $BC=bc$. On auroit conclu une égale absurdité, si AC avoit été supposée plus grande que ac. Partant il faut que $AC=ac$, ce qu'il faloit démontrer.



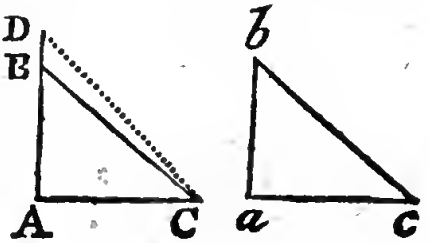
THEO-

* *Sup. n.* 59.

THEOREME V.

S'il y a égalité dans la ligne oblique, & dans l'éloignement du perpendicule, les perpendiculaires sont égales. 62

Soit $AC = ac$, & $BC = bc$. Il faut prouver que $AB = ab$. Soit posé ac sur AC, ces deux lignes égales conviendront, & la perpendiculaire ab avec la perpendiculaire AB, au moins en partie, par le premier Lemme *. Si l'on dit que $AB \angle ab$, & qu'ainsi b convient avec D, alors bc conviendra avec DC, ainsi lui sera égale, & partant DC † plus grande que BC, à qui on la suppose égale. On auroit aussi conclu une égale absurdité, si AB avoit été supposée plus grande que ab. Il faut donc que ab convienne entierement avec AB, & qu'ainsi $AB = ab$; ce qu'il falloit prouver.



DES LIGNES PARALLELES.

DEFINITION.

Deux lignes droites qui sont également distantes l'une de l'autre dans toutes leurs parties, sont dites paralleles. 63

Propositions évidentes touchant les lignes paralleles.

AVERTISSEMENT.

Ces Propositions sont des Corollaires de la Définition des lignes paralleles.

* *Sup. n. 56.* † *Sup. n. 59.*

PROPOSITION I.

64 *Une ligne droite qui eſt également éloignée en deux de ſes points d'une autre ligne droite, eſt parallele à cette ligne.*

Car la poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points; ainſi ces deux lignes étant également éloignées l'une de l'autre, elles ſont paralleles ſelon la définition.

PROPOSITION II.

65 *Les perpendiculaires entre deux paralleles ſont égales.*

Ces perpendiculaires ſont la meſure de la diſtance de ces deux paralleles, qui étant partout la même, ſont égales.

PROPOSITION III.

66 *Deux lignes paralleles étant prolongées à l'infini, ne ſe rencontreront point.*

Car elles ne peuvent ſe rencontrer qu'elles ne s'approchent d'un côté; ainſi elles ne ſont plus dans la même diſtance; par conſéquent elles ne ſont plus paralleles, ainſi qu'on le ſuppoſe.

PROPOSITION IV.

67 *Deux lignes droites qui ne ſont pas paralleles, mais qui s'approchent plus d'un côté que d'un autre, ſe rencontrent enfin, ſi on les prolonge aſſez.*

Cela eſt évident

AVERTISSEMENT.

Cela ne ſe doit entendre que des lignes droites; car il y a des lignes courbes dont la nature eſt telle, qu'il y a des lignes droites qui s'en approchent toujours ſans jamais les rencontrer, comme on le démontre; & ces lignes droites s'appellent les aſſymptotes de ces courbes.

PROPOSITION V.

63 *Deux lignes qui ſont perpendiculaires ſur une même ligne, ſont paralleles entre elles.*

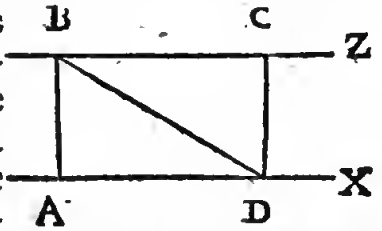
Car ces deux perpendiculaires ne ſe rencontre-

treront jamais [a]. Or si elles n'étoient pas paralleles, elles se rencontreroient, selon la Proposition précédente ; elles sont donc paralleles.

Lemme I.

Entre deux paralleles, les lignes perpendiculaires sur l'une le sont sur l'autre. 69

Si *AB* perpendiculaire sur *X*, ne l'est pas sur *Z*, donc *Z* ne l'est pas sur *AB* [b] ; ainsi étant inclinée sur cette ligne *AB*, elle s'approchera ou d'un côté ou d'autre de la ligne *X*, & la rencontrera [c] : par conséquent elle ne lui est pas parallele, contre la supposition qu'on fait qu'elle l'est.



Lemme II.

La ligne AB *ne peut être perpendiculaire sur* Z & X, *que ces deux lignes ne soient paralleles.* 70

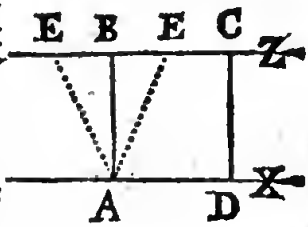
Car ces deux lignes (*même figure*) sont réciproquement perpendiculaires sur *AB* [d] ; partant elles sont paralleles [e].

Lemme III.

Si entre deux lignes droites, sont deux autres lignes droites égales, dont l'une est perpendiculaire sur la premiere & l'autre sur la seconde, je dis que ces deux premieres lignes sont paralleles. 71

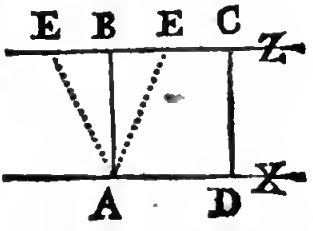
Entre *Z* & *X* sont *AB* & *CD* deux lignes égales, dont *AB* est perpendiculaire sur *X* & *CD* sur *Z* : je dis que *Z* & *X* sont paralleles.

Car si *Z* n'est pas parallele à *X*, elle s'en éloignera ou

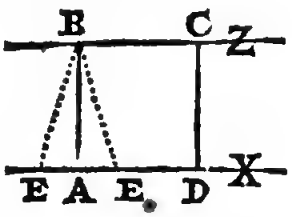


a *sup. n.* 52. b *sup. n.* 45. c *sup. n.* 67. d *sup. n.* 45. e *sup. n.* 68.

s'en approchera : on montrera que l'un & l'autre eſt abſurde ; ainſi il faut qu'elles ſoient paralleles.



1°. Si on ſuppoſe qu'elle s'éloigne, ayant du point *A*, tiré *AE* perpendiculaire ſur *Z* [a], alors ſi cette perpendiculaire convient avec *AB*, *Z* & *X* ſeront perpendiculaires ſur *AB* par la conſtruction, & ainſi paralleles entre elles [b], contre la ſuppoſition. Que ſi *AE* tombe à côté de *AB*, la perpendiculaire *AE* ſera plus courte que l'oblique *AB* [c] : par conſéquent auſſi plus courte que *CD* = *AB* [d], ainſi la ligne *Z* s'approchera de la ligne *X*, contre la ſuppoſition.



2°. Si on ſuppoſe que la ligne *Z* s'approche de la ligne *X*, il y aura une ſemblable abſurdité : car au point *B* ayant élevé ſur la ligne *Z* la perpendiculaire *BE* [e], comme *AB* eſt perpendiculaire ſur *X*, ſi elle convient avec *AB*, alors, ſuivant ce qui vient d'être dit, *Z* & *X* ſeront paralleles ; mais ſi *BE* tombe à côté, comme *AB* a été propoſée perpendiculaire ſur *X*, *BE* ſera oblique, & par conſéquent *BE* plus grande que *BA* [f] ou que ſon égale *CD* ; ainſi *Z* & *X* s'éloigneront, contre la ſuppoſition qui avoit été faite de s'approcher : ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME.

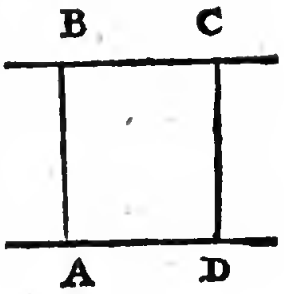
Par un point donné mener une ligne parallele à une ligne donnée. Eucl. I. Prop. 31.

72 Soit *AB* une ligne à laquelle il faut mener une parallele par le point donné *C*. De ce point

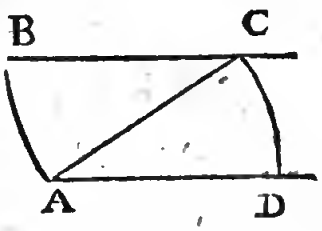
C

a *ſup.* n. 46. b *ſup.* n. 68. c *ſup.* n. 53. d *ſup. Axiome* 3. e *ſup.* n. 47. f *ſup.* n. 51.

C j'abaiſſe une perpendiculaire ſur la ligne donnée *AD*, ſur laquelle ayant élevé une perpendiculaire telle qu'*AB* égale à *CD*, il eſt clair que la ligne qui paſſera par les deux points *B* & *C* ſera parallele à *AD*, ſuivant la Définition *.



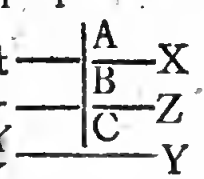
Voici encore une autre maniere. D'un point quelconque A, *ſoit décrit un Arc de telle ouverture qu'il paſſe par le point donné* C, *duquel & de la même ouverture* AC *ayant fait l'Arc* AB *égal à* DC, *la ligne menée par les points* B *&* C *ſera la parallele requiſe.*



THEOREME.

Deux lignes paralleles à une troiſieme ſont paralleles entre elles. Eucl. I. Prop. 30. 73

X & *Y* ſont paralleles avec *Z*. De *X* je mene *AB* perpendiculaire ſur *Z*, laquelle étant prolongée juſqu'en *C*, puiſqu'elle eſt perpendiculaire ſur *Z*, elle le ſera ſur *Y*, parallele avec *Z* †; & puiſque *Z* eſt parallele avec *X*, cette ligne perpendiculaire ſur *Z* le ſera auſſi ſur *X* parallele avec *Z* ‡. Ainſi puiſque *X* & *Y* ſont perpendiculaires ſur *AC*, elles ſont paralleles entre elles ‡: ce qu'il falloit démontrer.



COROLLAIRE.

On ne ſauroit faire paſſer par le même point deux differentes lignes qui ſoient paralleles à une même. 74

Car il faudroit par ce Théorême qu'elles fuſ-

* *ſup. n.* 62. † *ſup. n.* 60. ‡ *ſup. n.* 60. ‡ *ſup. n.* 60.

ſent paralleles entre elles, ce qui eſt abſurde, puiſqu'elles auroient un point commun, & qu'il eſt de l'eſſence des paralleles de ne ſe rencontrer jamais.

SECTION V.

De la differente poſition de deux Cercles au regard l'un de l'autre.

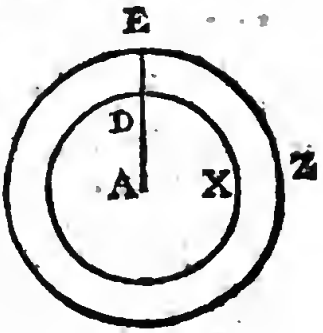
AVERTISSEMENT.

Un cercle peut être poſé tellement au regard d'un autre cercle, 1°. Qu'il ne le coupe ni ne le touche point. 2°. Qu'il le coupe; ou que ſans le couper, il le touche ou en dedans ou en dehors.

Propoſitions évidentes touchant la poſition des Cercles.

PROPOSITION I.

75 *LES cercles concentriques ne peuvent ni ſe couper ni ſe toucher.*



On peut concevoir que les cerles *X* & *Z* concentriques dont *A* eſt le centre, ſont faits par les points *D* & *E* de la même ligne *AE*. Ainſi le cercle que décrira *D* ſera toujours au dedans du cercle *Z* que décrira *E*. Ces deux cercles ne ſe peuvent donc rencontrer.

PROPOSITION II.

76 *Deux cercles concentriques ſont toujours en même diſtance.*

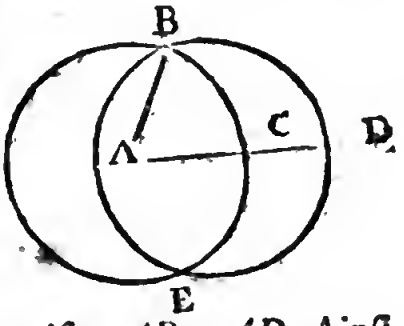
Car entre *X* & *Z* il y a toujours la même diſtance *DE*.

THEO-

THEOREME I.

Deux cercles qui ſe coupent ne ſont pas concentriques. Eucl. III. Prop. V. 77

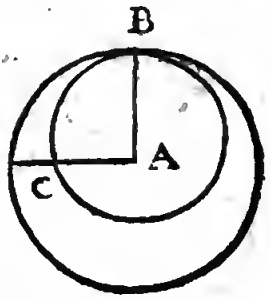
Soient deux cercles qui ſe coupent aux points *B* & *E*, je dis qu'ils n'ont pas pour centre un même point. Car ſi *A* eſt le centre de ces deux cercles qui ſe coupent au point *B*, les lignes *AB* & *AC* rayons du même cercle ſont égales. [a] *AC* = *AB*. Et par la même raiſon *AB* = *AD*. Ainſi *AC* = *AB* = *AD*; donc *AC* = *AD* [b]. C'eſt-à-dire, que la partie eſt égale au tout, ce qui ne peut pas être [c].



THEOREME II.

Deux cercles qui ſe touchent ne ſont pas concentriques, ou n'ont pas même centre. Eucl. III. Prop. 6. 78

Soient deux cercles qui ſe touchent au point *B*, je dis qu'ils n'ont point le même centre; car ſi *A* étoit le centre de ces deux cercles, alors *AD* = *AB* & *AB* = *AC* [d]: par conſéquent *AD* = *AB* = *AC*; ainſi *AD* = *AC* [e], c'eſt-à-dire, que la partie *AC* ſeroit égale à ſon tout *AD*, ce qui eſt abſurde.

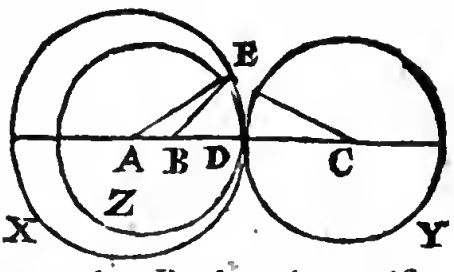


THEOREME III.

Si deux ou pluſieurs cercles ont leur centre dans une même ligne, qu'ils coupent dans un même point, ils ſe touchent en ce ſeul point. 79

a *ſup.* n. 20. b *ſup. Ax.* 3 c *ſup. Ax.* 1. d *ſup.* n. 20. e *ſup. Ax.* 3.

Les cercles X, Z, Y, ont leurs centres dans la même ligne qu'ils coupent au point D. Il faut prouver qu'ils ſe touchent en ce ſeul point D. Si l'on prétend qu'ils ſe touchent ailleurs, ou qu'ils ſe rencontrent en E; alors $AE = AD$, puiſque ce ſont les rayons d'un même cercle. Par la même raiſon $CD = CE$. Partant $AE + CE = AD + CD$, ce qui eſt abſurde*. De même on démontre que Z & X ne ſe rencontrent point en E; car s'ils ſe rencontroient, $BD = BE$, & $AE = AD$; mais $AD = AB + BD$, ou $AB + BE$; Donc $AE = AB + BE$, ce qui eſt abſurde †.



COROLLAIRE.

80 *Deux cercles ne ſe peuvent toucher en dedans ou en dehors qu'en un ſeul point.* Eucl. III. Prop. 13.

X & Z ſe touchent en dedans, (même figure.) Si c'eſt au point D, ils ne ſe peuvent toucher ailleurs, par exemple, au point E. S'ils ſe touchent en E, ils ne ſe peuvent toucher en D, car $AB + BE$ ſeroit égal à AE, ce qui eſt abſurde ‡. Que X & Y ſe touchent en dehors, ſi c'eſt au point D, ils ne ſe peuvent toucher dans un autre, par exemple en E, car alors $AC = AE + EC$, ce qui eſt abſurde ‡.

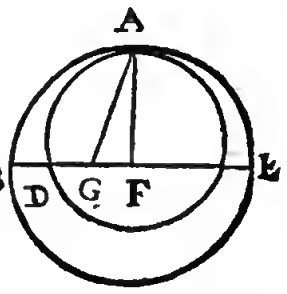
THEOREME IV.

81 *Si deux cercles ſe touchent en dedans, la ligne droite qui joindra leurs centres étant prolongée tombera ſur le point d'attouchement de ces deux cercles.* Eucl. III. Prop. 11.

1°. Par le Théorême II. ces deux cercles n'ont pas un même centre. 2°. Soit F, centre de BAB: ſi

* *Sup. n.* 12. † *ſup. n.* 12. ‡ *ſup. n.* 12. ‡ *ſup. n.* 12.

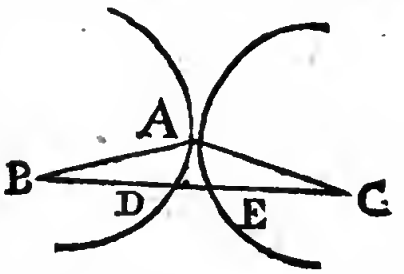
si on veut que *G* le soit de *DAD* qui n'est pas dans la ligne *FA*, qui passe par *A* point de l'attouchement, alors *GA* = *GD* [a]. Ainsi *FG* + *GA* = *FG* + *GD* [b]. Or *FG* + *GA* > *FA* [c], & par conséquent que *FB*, car *FA* = *FB* [d]. Ainsi *FG* + *GD* > *FB* ou *FG* + *GB*. Otant donc *FG*, partie commune, restera *GD* > que le tout *GB* [e], ce qui est impossible.



* THEOREME V.

Si deux cercles se touchent en dehors, une ligne droite menée par leurs centres, passera par le point de leur attouchement. Eucl. III. Prop. 12. 82

Soient deux cercles *DAD* & *EAE* qui se touchent en *A*. Je dis que la ligne qui joindra leurs centres passera par le point *A*. Si on le nie, on est contraint de dire une chose absurde; car que *B* soit centre de *DAD*, & *C* de *EAE*, & qu'ainsi la ligne *BC* ne passera pas par *A* où ces deux cercles se touchent: *BA* = *BD* & *CA* = *CE* [f]. Donc *BA* + *AC* = *BD* + *CE*. Puisque *BC* ne passe pas par le point d'attouchement de ces deux cercles qui est commun, *D* & *E* ne sont pas un même point: il y a entre deux un intervalle, savoir *DE*, je l'ajoute à *BD* + *CE*; alors *BD* + *DE* + *CE* est plus grand que *AB* + *AC*, ce qui est absurde [g].



SEC-

a *sup.* n. 20. b *sup. Axiome* 4. c *sup.* n. 12. d *sup.* n. 20. e *sup. Axiome* 7. f *sup.* n. 20 g *sup.* n 12.

SECTION VI.

De la poſition d'une Ligne droite au regard d'un Cercle.

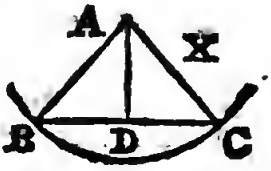
AVERTISSEMENT.

Une ligne droite peut être entierement dans un cercle, ou au dehors. Si elle eſt dehors, elle le peut quelquefois atteindre, lorſqu'on la prolonge; de ſorte quelle le coupe ou qu'elle le touche ſeulement ſans y entrer.

*THEOREME I.

83 *Si en la circonference d'un cercle on prend deux points comme on voudra, la ligne droite menée de l'un à l'autre de ces deux points, tombera dans le cercle.* Eucl. III. Prop. 2.

B & *C* ſont deux points dans la circonference du cercle *X*; il faut prouver que la ligne *BC* menée entre ces points eſt entierement dans ce cercle. De *A* centre de *X* ſoit ſur *D* milieu de *BC* une ligne droite; puiſque *AB* & *AC* rayons de *X* ſont égaux, & que *D* eſt le milieu de *BC*, cette ligne *AD* eſt perpendiculaire [a], & partant plus courte que *AB* & *AC* [b]. Ainſi *D* eſt dans le cercle [c]. Or toute autre ligne oblique menée de *A* ſur *BC*, ſera auſſi plus courte que *AB* & *AC* [d]. La ligne *BC* eſt donc entierement dans le cercle.



THEOREME II.

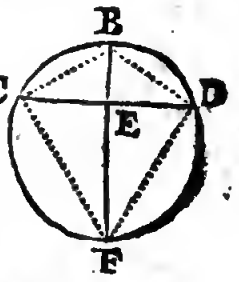
84 *Si une corde eſt coupée perpendiculairement en deux parties égales, par une ligne, je dis que cette ligne coupe l'arc du cercle en deux également, & paſſe par le centre.*

Soit la corde *CD* coupée perpendiculairement en deux parties égales par la ligne *BF* au point *E*,

a *ſup. n.* 36. b *ſup. n.* 40. c *ſup. n.* 53. d *ſup. n.* 59.

E, je dis que cette ligne coupe l'arc *CD* en deux également en *B*, & passe par le centre du cercle.

1°. Puisque le point *E* est également éloigné des points *C* & *D*, & que *BF* est perpendiculaire sur *CD*, le point *B* qui est dans cette perpendiculaire sera aussi également éloigné des points *C* & *D*[a], & partant la corde *BC* égale à la corde *BD*, & par conséquent l'arc *BC* égal à l'arc *BD*[b]; ainsi l'arc *CBD* est coupé en deux également: la même chose sera pour l'arc *CFD*.



2°. La perpendiculaire *BF* passe par tous les points également éloignez de *C* & de *D*[c]. Or le centre de ce cercle est également éloigné de ces deux points *C* & *D*; donc *BF* passe par ce centre.

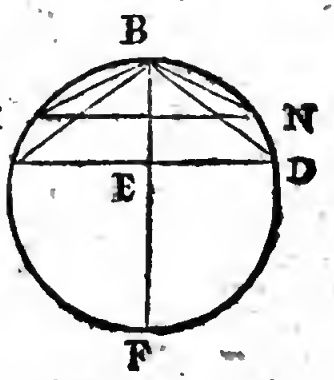
COROLLAIRE I.

Il est évident que pour couper un arc en deux parties égales, il faut élever sur la moitié de sa corde une perpendiculaire. Eucl. III. Prop. 30. 85

COROLLAIRE II.

Les deux arcs compris entre deux lignes parralleles sont égaux. 86

Les deux arcs *MC* & *ND*, compris entre les deux lignes ou cordes paralleles *MN* & *CD* sont égaux; car ayant tiré le diametre *BF* perpendiculaire sur *CD*[d], il le sera aussi sur *MN*[e]; ainsi *BM* = *BN* & *BC* = *BD*[f]. Les arcs de ces cordes égales seront



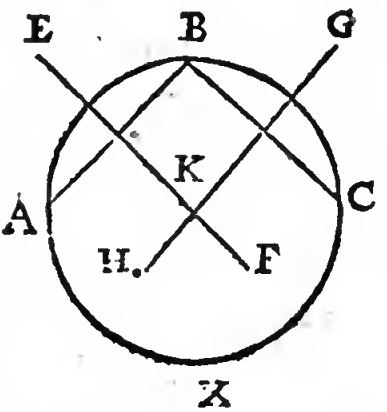
a *sup.* n. 42 b *sup.* n. 31. c *sup.* n. 42.
d *sup.* n. 46. e *sup.* n. 69. f *sup.* n. 42.

egaux *. Donc l'arc $BC - BM = BD - BN$; mais l'arc BC moins l'arc BM eſt égal à l'arc CM, & pareillement $BD - BN = ND$; donc $CM = ND$: ce qu'il falloit démontrer. Que ſi, au-lieu de la corde MN on avoit ſuppoſé en B une Tangente parallele à CD, on auroit démontré encore plus promptement l'arc BC égal à l'arc BD.

PROBLEME I.

87 *Trois points étant donnez, trouver le centre d'un cercle qui paſſe par ces points.* Euclid. III. Prop. 1.

Soient trois points donnez A, B, C. On les joindra par deux droites AB, BC, que l'on regardera comme les cordes du cercle cherché; & menant deux perpendiculaires ſur le milieu de ces deux lignes, je dis que le point K où ces deux lignes ſe coupent, eſt le centre du cercle que l'on demande: ce qui eſt évident par le Théorême précédent.



Si les trois points donnez étoient dans une ligne droite, la queſtion auroit été impoſſible, comme il eſt évident; car, alors les deux perpendiculaires ne ſe couperoient pas, étant paralleles.

COROLLAIRE I.

88 *Deux cercles ne peuvent avoir trois points communs, comme* A, B, C, *qu'ils ne les ayent tous.*

Ces deux cercles ayant un même centre, ſavoir K, & étant décrits d'un même intervalle, ils ne peuvent être qu'un même cercle †.

Co-

* *Sup. n* 31. † *Sup. n.* 38.

COROLLAIRE II.

Deux cercles ne ſe peuvent couper en plus de deux points. Eucl. III. Prop. 10. 89

Car s'ils ſe coupoient en trois, ils auroient trois points communs; ainſi par le Corollaire précédent ce ne ſeroit pas deux differens cercles.

COROLLAIRE III.

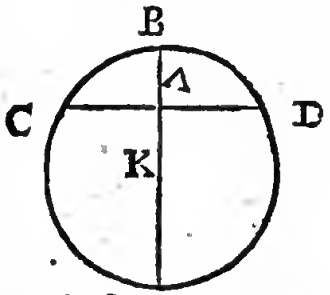
Une portion de cercle étant donnée, on peut achever le cercle. Eucl. III. Prop. 25. 90

Marquez trois points dans cette portion, après quoi vous pouvez trouver le centre du cercle dont elle eſt partie par le Problême précédent.

THEOREME III.

Si une ligne coupe la corde ou l'arc d'un cercle en deux parties égales, & paſſe par le centre, je dis qu'elle la coupe perpendiculairement. Eucl. III. Prop. 3. 91

Soit la ligne *BK*, qui coupe l'arc, ou la corde d'un cercle, en deux parties égales & paſſe par le centre *K*; je dis qu'elle coupe cette corde perpendiculairement; car il y a dans cette ligne *BK* deux points, ſavoir *A* ou *B*, & *K* également éloignez de *C* & de *D*, puiſque *A* eſt la moitié de la ligne *CD*, & *B* moitié de l'arc *CBD*, & que *K* eſt le centre. Donc *BK* eſt perpendiculaire*.



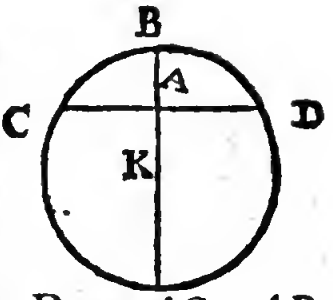
THEOREME IV.

Si une ligne coupe perpendiculairement la corde d'un cercle, & paſſe par le centre, je dis qu'elle la coupe en deux parties égales. Eucl. III. Prop. 3. 92

La ligne *BK* paſſe par le centre *K*, & eſt per-

* *ſup. n.* 40.

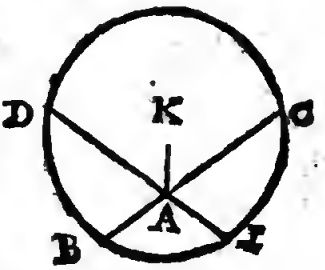
pendiculaire ſur CD; je dis qu'elle coupe CD par la moitié. Le centre eſt également éloigné de C & de D, & BK étant perpendiculaire, le point A & tous les autres de BK doivent être également éloignez de C & de D*. Donc $AC=AD$; ainſi CD eſt coupé par la moitié.



THEOREME V.

93 *Deux cordes qui ne paſſent pas par le centre, ne ſe peuvent couper par le milieu.* Eucl. III. Prop. 4.

Soient deux cordes DE, BG, qui ſe coupent au point A, autre que le centre du cercle; je dis qu'elles ne ſe coupent pas en parties égales. Si ces deux cordes ſe coupent en A, qui n'eſt pas le centre, & que ce point ſoit le milieu de ces deux lignes, ayant mené de A une ligne au centre K, cette ligne KA ſera perpendiculaire ſur BC & ſur DE†. Donc BC & DE ſeront perpendiculaires ſur KA‡; ainſi ſur le même point A il y a deux perpendiculaires, ce qui eſt impoſſible ‡.



THEOREME VI.

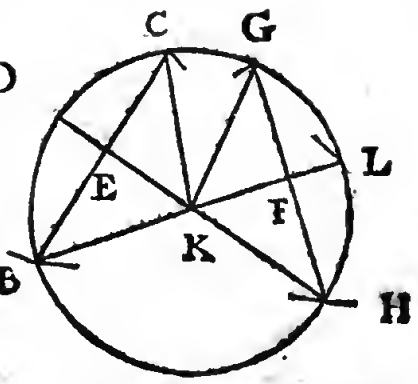
94 *Les cordes qui ſont également éloignées du centre ſont égales; & ſi elles ſont égales, leurs diſtances du centre ſont égales.* Eucl. III. Prop. 14.

Soient les cordes BC & GH également éloignées du centre K; je dis qu'elles ſont égales; & ſi elles ſont égales, leurs diſtances KE & KF du centre ſont égales.

1°. Je mene ſur ces cordes les perpendiculai-

* *ſup.* n. 42. † *ſup.* n 91. ‡ *ſup.* n. 45. ‡ *ſup.* n. 49.

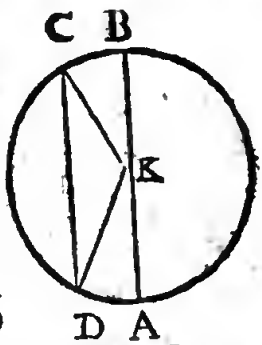
laires DK & KL qui les coupent par le milieu*. Par l'hypotheſe $KE = KF$, & puiſque $BK = KH$ & $KC = KG$: donc l'oblique KB étant égale à l'oblique KH, & les perpendiculaires KE & KF de ces obliques étant égales, les éloignemens du perpendicule BE & HF ſeront égaux†. Par la même voye on prouve que $EC = FG$; qu'ainſi $BC = HG$; ce qu'il falloit prouver.



2°. On a montré que les obliques comme KB & KH étant égales, & les diſtances BE & HF du perpendicule étant égales, les perpendiculaires KE & KF ſont égales ‡.

THEOREME VII.

De toutes les lignes qui ſont dans le cercle, le diametre ou la ligne qui paſſe par le centre eſt la plus grande. Eucl. III. Prop. 15. 95



Soit la ligne AB le diametre, il faut prouver qu'il eſt plus grand que CD, ou que quelque autre ligne que ce ſoit qui ne puiſſe paſſer par le centre: ce qui eſt évident. Car $KC = KB$, & $KD = KA$; ainſi $BA = KC + KD$ Or $KC + KD$ eſt plus grand que CD‡; donc BA eſt plus grand que CD.

THEOREME VIII.

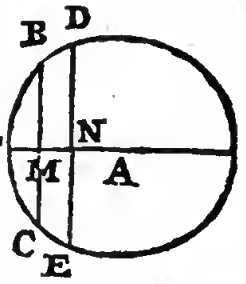
Les cordes les plus proches du centre du cercle ſont les plus grandes, & les plus grandes ſont les 96

plus

* *ſup. n.* 92. † *ſup. n.* 61. ‡ *ſup. n.* 62. ‡ *ſup. n.* 12.

plus proches du centre du cercle. Eucl. III. Prop. 15.

A ſoit le centre d'un cercle, & les lignes propoſées ſoient *BC*, & *DE*. Il faut prouver que *DE* qui eſt plus proche du centre *A*, eſt plus grande que *BC* qui en eſt plus éloignée.

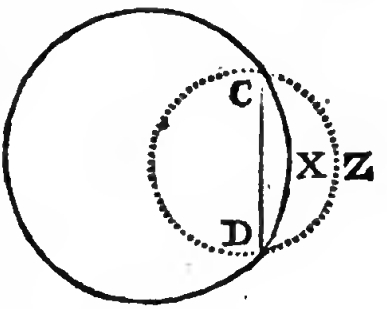


La diſtance de *BC* eſt *AM*, & celle de *DE* eſt *AN*, laquelle diſtance eſt plus petite. Il faut prouver que *DE* qui eſt plus proche du centre eſt plus grande que *BC*, qui en eſt plus éloignée, ce qui eſt évident; car l'arc *EFD* eſt plus grand que l'arc *CFB*: Or les plus grands arcs ont de plus grandes cordes*. Donc *DE* corde de *EFD* eſt plus grande que *BC* corde de *CFB*. C'eſt ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME IX.

97 *Si une ligne eſt la corde commune de deux arcs de cercles inégaux qui ſe coupent, je dis que l'arc du petit cercle contient plus de degrez que l'arc du grand.*

Soient deux cercles inégaux *Y* & *Z* qui ſe coupent aux points *C* & *D*, la corde *CD* leur eſt commune. Je dis que l'arc *CZD* du petit cercle contient plus de degrez que l'arc *CXD* du grand. Car ſi les deux arcs dont *CD* eſt la corde étoient les mêmes, qu'ils fuſſent par exemple également de dix degrez, il ne ſeroit pas vrai, comme on en eſt convenu†, que les arcs d'un pareil nombre de degrez ont



* *ſup.* n. 32. † *ſupr.* n. 33.

ont de plus grandes cordes dans les plus grands cercles.

COROLLAIRE

Donc une même ligne ne peut être la corde de 98
deux arcs d'un pareil nombre de degrez, qui ſoient portions de cercles inégaux.

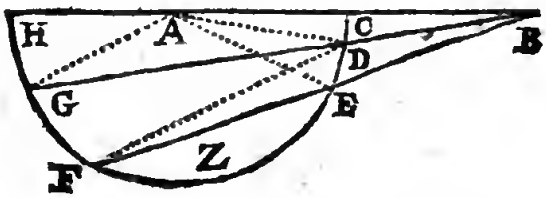
AVERTISSEMENT.

Il a été obſervé ſup. n. 26. *qu'on conſidere toujours le plus petit arc de chaque cercle, à moins qu'il ne ſoit expliqué autrement.*

THEOREME X.

Si d'un point pris hors d'un cercle, on mene 99
pluſieurs lignes qui le traverſent & ſe terminent à la circonference, je dis 1°. *De toutes celles qui tomberont ſur la partie convexe, celle qui paſſera par le centre étant prolongée, ſera la plus courte. Celles enſuite qui ſeront plus près d'elle, ſeront plus courtes que les plus éloignées.* 2°. *C'eſt le contraire dans des lignes qui tombent ſur la partie concave.* Eucl. III. Prop. 8.

Soit le point *B*, duquel on ait mené les lignes *BH*, *BG* *BF*; je dis 1°. Que *BC* qui paſſe par le centre eſt plus courte que toute autre menée du même point, par exemple, que *BD*.



Car *AC* = *AD*: Or *AC* + *CB* eſt plus courte que *AD* + *DB* *. Donc *BC* ſera plus courte que *BD* †. *AD* = *AE*. Or *AD* + *DB* eſt plus court

* *ſup. n.* 12. † *ſup. Ax.* 7.

court que $AE + EB$ [a]. Donc retranchant les grandeurs égales AD & AE, le reſte DB ſera plus court que le reſte BE [b].

2°. Que BH qui paſſe par le centre eſt la plus grande; car $AB + AH = AB + AG$. Or $AB + AG$ eſt plus grand que BG [c]. Donc BH eſt plus grand que BG. Il eſt pareillement évident que $BD + DF$ eſt plus grand que BF [d]. Or DG, eſt plus grand que DF [e]. Donc $BD + DG$ eſt plus grand que BF.

COROLLAIRE.

100 *S'il y a deux lignes droites égales ou inégales poſées l'une ſur l'autre, & convenantes par un point d'une de leurs extrémitez, ſur lequel l'une ou l'autre tourne circulairement, en s'écartant, la ligne qui joindra leurs autres extrémitez deviendra toujours plus grande juſques à ce que ces deux lignes ne faſſent qu'une ſeule ligne droite.*

Soient deux lignes AB, AC, ſur AB figure précédente, dont AC tournera circulairement ſur l'extrémité A, en s'écartant de AB, paſſant par D, E, F. Les lignes comme BD, BE, BF, &c. qui joignent leurs extrémitez deviennent toujours plus grandes, juſques à ce que leſdites deux lignes forment la ſeule droite BAH: c'eſt ce qui vient d'être prouvé.

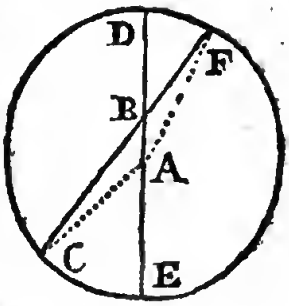
THEOREME XI.

101 *Si d'un point pris hors le centre du cercle, on mene des lignes à la circonference, je dis que celle qui paſſera par le centre ſera la plus grande, & le reſte de ce diametre ſera le plus court.* Eucl. III. Prop. 7.

Soit le point B, & ſoient menées par ce point les lignes BE qui paſſe par le centre A, BC, BF, BD; je dis que BE eſt la plus grande

a *ſup.* n. 57. b *ſup. Ax.* 7. c *ſup.* n. 12.
d *ſup.* n. 12. e *ſup.* n. 96.

de, & ſa partie BD la plus courte de celles qui peuvent être terminées à ce point.



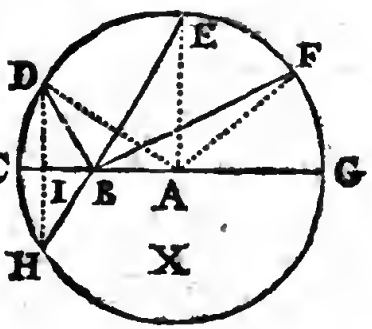
1°. $BA + AE = BA + AC$, puiſque $AE = AC$. Or $AB + AC > BC$[a]. Donc BE égal à $BA + AC$, eſt plus grand que BC.

2°. $AF = AB + BD$. Or $AB + BF$ eſt $> AF$[b]; ôtant donc AB partie commune, le reſte BF ſera plus grand que le reſte BD[c].

THEOREME XII.

De tous les points qui ſont dans le cercle hors le centre, on ne peut mener à la circonference plus de deux lignes qui ſoient égales. Eucl. III. Prop. 9. 102

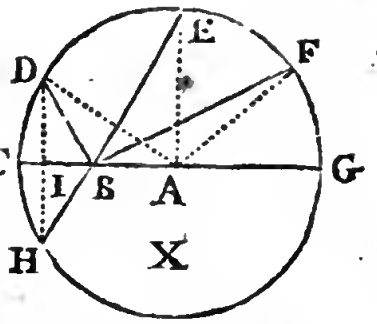
Soit A le centre du cercle X, le point B ne l'eſt donc pas. Je dis 1°. Que BD eſt plus grande que BC[d]. 2°. Que BE eſt plus grande que BD; car AD & AE ſont toujours le rayon de X, qui en tournant & s'éloignant de AB, doit faire BE plus grande que BD[e], & pareillement BF eſt plus grande que BE. Or BG eſt plus grande que BF[f]. Par conſéquent dans toute la partie $CDFG$ du cercle X, toutes les lignes menées de B à la circonference de X ſont toutes inégales.



Prenant l'arc CH égal à CD, puiſque AC eſt rayon, il coupera DH perpendiculairement

a *ſup.* n. 12. b *ſup.* n. 12. c *ſup. Axiome* 7.
d *ſup.* n. 101. e *ſup.* n. 100. f *ſup.* n. 101.

ment *, & en deux parties égales au point *I* †; ainſi y ayant égalité de perpendicule & de ſon éloignement, les obliques *BH*, *BD* ſeront égales ‡; mais toute autre ligne que *BH* ſera ou plus petite ou plus grande, comme on vient de le voir. On peut démontrer de la même maniere que de part & d'autre de *C*, on peut mener deux lignes égales, & non davantage.



COROLLAIRE I.

103 *Il n'y a donc que le ſeul centre du cercle d'où l'on puiſſe tirer à la circonference plus de deux lignes égales.*

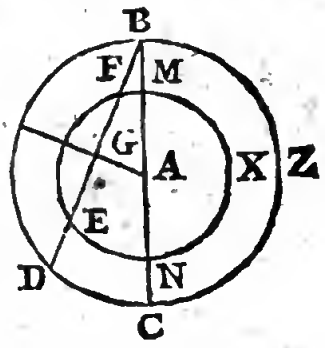
COROLLAIRE II.

104 *Tout point dans le cercle dont on peut tirer à la circonference trois lignes égales, eſt le centre du cercle.* Euclid. III. Prop. 9.

THEOREME XIII.

105 *Une ligne traverſant deux cercles concentriques, ſoit qu'elle paſſe par le centre ou qu'elle n'y paſſe pas, les parties de chacune de ces lignes interceptées entre les deux circonferences ſont égales entre elles.*

Soient *BC*, *BD* qui traverſent deux cercles concentriques; je dis que *BM* = *NC*, & *BF* = *ED*. 1°. Pour *BC* qui paſſe par le centre, cela a été prouvé ‡.



2°. De *A* menant une perpendiculaire ſur *BD*, alors

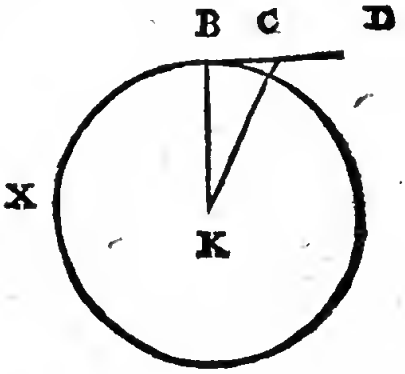
* *ſup.* n. 91. † *ſup.* n. 42. ‡ *ſup.* n. 58. ‡ *ſup.* n. 76.

alors $GD=GB$ & $GE=GF$[a]. Donc $GD-GE=GB-FG$[b]. Or $GD-GE=DE$, & $GB-GF=FB$; donc $DE=BF$.

THEOREME XIV.

Une ligne perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, touche le cercle, & ne le touche qu'en un seul point. Eucl. III. Prop. 16 & 18. 106

BD eſt perpendiculaire ſur BK, il faut prouver que cette ligne ne touche le cercle X qu'au point B.



Si on dit qu'elle le touche dans un ſecond point, comme en C, je mene de K à C une ligne, laquelle n'eſt pas perpendiculaire ſur BD, puiſque de K ſur BD on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire[c]. Elle eſt donc plus grande que le rayon BK, qui eſt perpendiculaire ſur BD[d]; partant le point C eſt hors le cercle X: ainſi BD ne le touche pas en ces deux points B & C, mais ſeulement en B.

COROLLAIRE.

Il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne qui touche le cercle dans un même point. 107

Deux differentes lignes ne peuvent toucher le cercle X au même point B; car par ce Théorême, elles ſeroient toutes deux perpendiculaires ſur BK; ce qui eſt impoſſible[e].

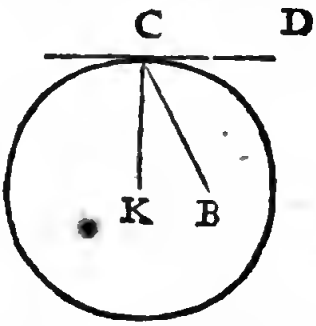
THEOREME XV.

Si au dedans d'un cercle on tire une ligne qui ſoit perpendiculaire ſur le point de l'attouchement de la tan- 108

a *ſup. n.* 92. b *ſup. Axiome* 5. c *ſup. n.* 51.
d *ſup. n.* 53. e *ſup. n.* 49.

tangente ou touchante, cette perpendiculaire passera par le centre de ce cercle. Euclid. III. Prop. 19.

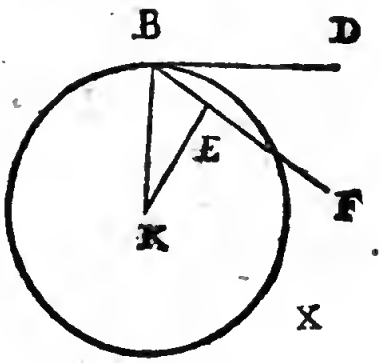
CD est une tangente ou touchante: de ce point d'attouchement, je mene au dedans du cercle une perpendiculaire: je dis qu'elle passe par le centre *K*. Si on veut que ce soit par *B* qui n'est pas le centre, je prouve qu'on n'a pas raison; car de *C* ayant mené le rayon *KC*, & élevé au point *C* une perpendiculaire qui sera tangente*, mais elle sera la même que *CD*, puisqu'au point *C* il n'y peut avoir qu'une seule Tangente †: Ainsi sur la ligne *CD* au même point il y auroit deux perpendiculaires *CK* & *CB*, ce qui implique ‡.



THEOREME XVI.

109 *Entre une tangente & la circonference d'un cercle, on ne peut mener aucune ligne droite, mais on peut mener un nombre infini de lignes circulaires.* Eucl. III. Prop. 16.

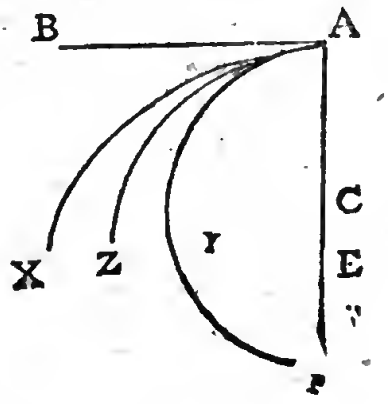
Si entre *BD* tangente & le cercle *X*, on peut mener quelque ligne droite qui partage l'espace entre la tangente *BD* & le cercle, que ce soit la ligne *BF*, sur laquelle je mene du point *K* une autre ligne qui lui soit perpendiculaire, savoir *KE*, qui sera plus courte que le rayon *BK*, qui n'est



* *sup. n.* 106. † *sup. n.* 107. ‡ *sup. n.* 51.

n'eſt pas perpendiculaire ſur cette ligne *; ainſi KE étant plus petite que le rayon BK, ſon extrémité eſt au dedans du cercle. Par conſéquent la ligne B n'eſt pas hors du cercle, ainſi elle ne partage pas l'eſpace qui eſt entre lui & la tangente BD.

Mais entre la tangente AB & le cercle Υ, on peut faire paſſer une infinité de cercles; car ayant prolongé le rayon A au-delà du centre C, & de E comme centre, & de l'intervalle EA ayant fait le cercle Λ, la ligne AB ſera tangente à ce cercle †, lequel étant plus grand, ſera au dehors du cercle Υ. Pareillement le cercle X, dont le centre eſt P, ſera encore entre AB & Υ, ainſi à l'infini. Par conſéquent entre la tangente AB & le cercle Υ on peut faire paſſer une infinité de lignes circulaires.



COROLLAIRE.

Il eſt évident que l'eſpace compris entre la tangente & la circonference d'un cercle ſe peut donc diviſer en une infinité de parties. 110

THEOREME XVII.

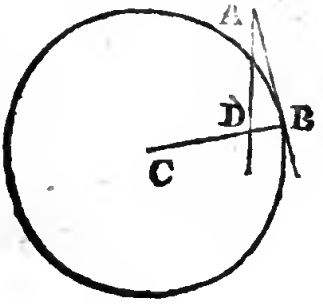
D'un point hors le cercle on ne peut mener au cercle d'un même côté plus d'une tangente. 111

Toute autre ligne le coupera, ou ne l'atteindra pas.

Soit A un point donné hors le cercle. La ligne AB le touche au point B. Je dis que de A vers B on ne peut point mener une autre tan-

* *ſup. n.* 53. † *ſup. n.* 106.

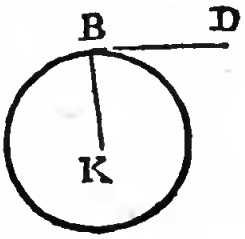
tangente, que toute autre ligne le coupera, ou ne le touchera pas. Car 1°. Si elle eſt au-delà de AB, elle ne touchera pas le cercle. 2°. Si elle paſſe par B, ce n'eſt pas une autre ligne que AB. 3°. Si elle paſſe au deſſous de B par le point D; puiſque $CB > CD$, le point D ſera dans le cercle *. Donc AD entre dans le cercle, & le coupe.



PROBLEME II.

112 *Mener une ligne droite qui touche un cercle dans un point donné.*

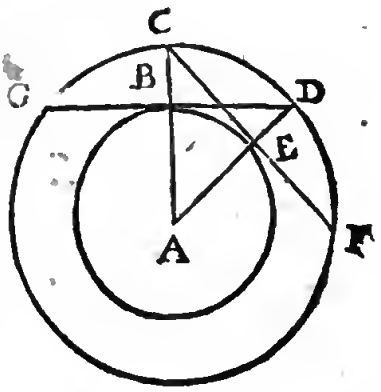
Le centre eſt K, le point donné B, je mene le rayon KB, & ſur ſon extrémité B † j'éleve perpendiculairement BD qui ſera la tangente qu'il falloit faire ‡.



PROBLEME III.

113 *D'un point donné hors d'un cercle, tirer une tangente.* Eucl. III. Prop. 17.

Le cercle eſt BE, le point donné eſt C, duquel je mene une ligne au centre A, & au point B, où cette ligne coupe le cercle, par le Problême précédent je fais la tangente CD. Je décris un cercle concentrique par C, & de D où ce cercle eſt coupé



par

* *Sup. n.* 36. † *Sup. n.* 47. ‡ *Sup. n.* 106.

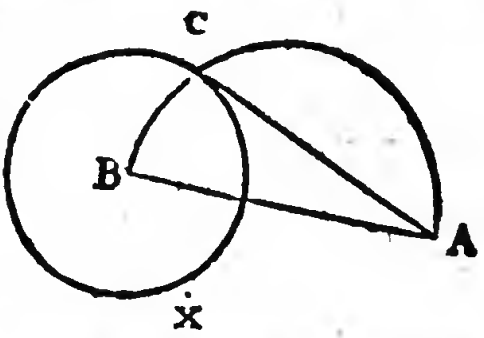
par la tangente GD, je prens DF égale à DC, je joins C & F par une ligne qui ſera la tangente.

Par la conſtruction, la corde $GD = CF$, car l'arc GC eſt égal à l'arc CD *, & l'arc CD à l'arc DF; ainſi les arcs GD & CF étant égaux, leurs cordes ſont égales †.

Je mene de D au centre A la ligne AD qui ſera perpendiculaire ſur CF, puiſque deux de ſes points, ſavoir A & D, ſont également éloignez de ſes extrémitez: Or puiſque les cordes DG & CF ſont égales, les lignes AB & AE ſont égales ‡. Donc le point E auſſi bien que B eſt dans la circonference du cercle BEB, ainſi la ligne CF étant perpendiculaire ſur E, extrémité du rayon AE, elle touche le cercle ‡.

AVERTISSEMENT.

Ce Problême ſe pratique plus facilement ainſi. 114 *Soit* A *le point donné, duquel il faut mener une tangente au cercle* X. *Après avoir tiré la ligne* AB *de* A *à* B *centre du cercle* X, *il faut décrire ſur cette ligne le cercle* ABC, *& au point de ſection* C *mener* AC *qui ſera la tangente qu'on cherchoit; ce que l'on ne peut pas démontrer en ce lieu.*



C ELE-

* *ſup.* n. 92. † *ſup.* n. 31. ‡ *ſup.* n. 94. ‡ *ſup.* n. 106.

ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DE L'ETENDUE.

LIVRE SECOND.

De la ſeconde eſpece d'Etendue, qui eſt la Largeur. Des Surfaces planes.

SECTION PREMIERE.

Des Angles, ou Surfaces qui ſont entre deux lignes, qui ſe rencontrent indirectement.

AVERTISSEMENT.

En parlant ici des Surfaces, nous ne conſiderons que les planes, c'eſt-à-dire celles qui ſont les plus courtes entre deux lignes droites, commençant par celles qui ſont renfermées entre deux lignes qui ſe rencontrent ou qui ſe coupent dans un point.

DE-

DEFINITIONS.

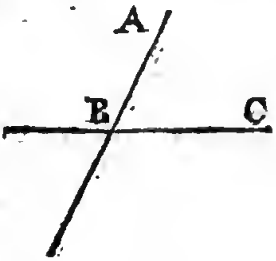
DEFINITION I.

L'*Angle eſt l'ouverture de deux lignes, qui ſe rencontrent indirectement.* 1

Deux lignes qui ſe rencontrent directement, ne font qu'une même ligne.

DEFINITION II.

On appelle ſommet de l'Angle, le point de rencontre des deux lignes qui le forment, comme le point B; *& ces deux lignes ſont appellées les côtez, ou les jambes de l'Angle.* 2



Ainſi *AB* & *BC* ſont les côtez ou les jambes; lorſqu'on marque un Angle avec trois lettres comme *ABC*, celle du milieu *B* marque le ſommet, & les deux autres *A* & *C*, les côtez.

DEFINITION III.

On nomme Angle plan, celui qui eſt fait ſur un plan. 3

DEFINITION IV.

Il y a trois ſortes d'Angles conſiderez par rapport à leurs côtez. Le rectiligne, le curviligne & le mixtiligne. Le rectiligne eſt celui qui eſt formé par la rencontre de deux lignes droites, comme C; *le curviligne eſt celui qui eſt formé par la rencontre de deux lignes courbes, comme* A; *le mixtiligne* 4

ligne eſt celui qui eſt formé par la rencontre d'une ligne droite, & d'une courbe, comme B.

Propoſitions évidentes touchant les Angles.

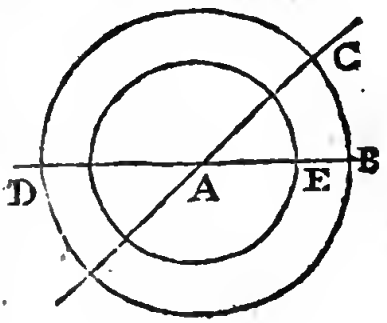
Avertissement.

Ce ſont des Corollaires de la Définition de l'Angle.

Proposition I.

5 *Il eſt évident par la définition de l'Angle, que ſa grandeur ne dépend pas de la longueur des lignes qui le forment, mais de leur ouverture.*

Qu'on prolonge les lignes *AB*, & *AC*, ou qu'on en retranche, c'eſt toujours la même ouverture ; & la ſurface qui eſt à cette ouverture, c'eſt-à-dire la plus près du ſommet *A*, n'en eſt augmentée, ni diminuée.



Proposition II.

6 *Un angle ne peut être augmenté, ni diminué, que lorſqu'un de ſes côtez en tournant ſur le ſommet comme ſur un centre, s'éloigne ou s'approche de l'autre côté.*

Proposition III.

7 *Un des côtez de l'angle en tournant & s'éloignant de l'autre côté, fait toujours cet angle plus grand, juſques à ce que faiſant une ligne droite avec cet autre côté, il ne fait plus d'angle.*

Proposition IV.

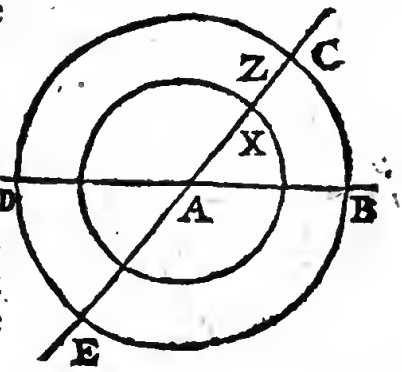
8 *Un des côtez de l'angle ne peut faire en tournant qu'un tour entier ou un cercle, après quoi il*

il ſe joint avec l'autre côté, & ne fait avec lui qu'une ſeule ligne.

PROPOSITION V.

Les arcs ou portions de differens cercles décrits par les differens points d'un des côtez de l'angle, ſont d'un pareil nombre de degrez. 9

Le point *X* du côté *AB* ou *AC* décrit le cercle *XX*, & le point *Z* le cercle *ZZ*; je dis que les portions de ces deux cercles compriſes entre les rayons *AB* & *AC* ſont d'un égal nombre de degrez. Car puiſqu'ils ſont décrits en même tems, ſi nous diviſons ce tems en 360 momens, autant que le cercle a de degrez; dans le premier moment où *Z* décrira la 360e. partie de toute ſa grandeur, il eſt évident que *X* fera auſſi une même partie du cercle qu'il décrit. Car comme dans un même tems ces deux cercles entiers s'achevent, auſſi chaque partie s'acheve à proportion.



PROPOSITION VI.

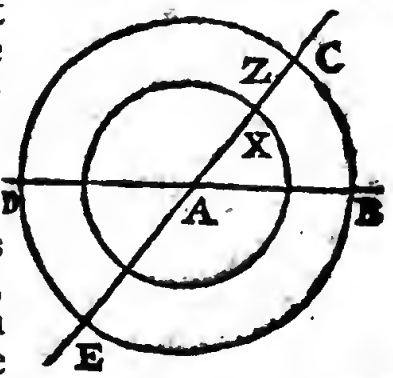
Du ſommet d'un angle, comme d'un centre, ayant fait un cercle, la portion de ce cercle compriſe entre les côtez de cet angle, eſt la meſure de cet angle. 10

PROPOSITION VII.

Le plus grand angle ne peut avoir pour ſa meſure toute la demie circonference. 11

Car lorſque le côté *AC* de l'angle *BAC*, a fait en tournant la demie circonference *BCD*, que *C* eſt venu au point *D*, alors il ne fait plus qu'une ligne droite avec *AB*: Car puiſqu'on

ſuppoſe que *BCD* eſt la demie circonference, il faut que *AD* + *AB* ſoit le diametre du cercle; & qu'ainſi *AD* & *AB* ne ſoient qu'une ligne droite qui coupe le cercle en deux parties égales. Toute la circonference du cercle eſt de trois cens ſoixante degrez, & par conſéquent la demie circonference de cent quatre-vingts degrez; ainſi un angle ne peut jamais être de cent quatre-vingts dégrez: car lorſque le côté *AB* eſt venu en *D*, *AC* & *AB* ne font qu'une ligne droite.



AVERTISSEMENT.

Que ſi AC *paſſe au-delà de* DA, *& vient en* E, *il ſe formera par ce moyen l'angle* BAE, *plus grand que* 180 *degrez, que quelques Géometres nomment Revers, & qui a pour ſa meſure l'arc* BCDE. *On ne conſidere pas ici cette ſorte d'angle, mais ſeulement celui* EAB *meſuré par l'arc* EB *complément de l'arc* BCDE *au cercle entier, ainſi qu'on le va expliquer.*

Des differentes ſortes d'Angles par rapport à leur ouverture, ou par rapport au Cercle.

AVERTISSEMENT.

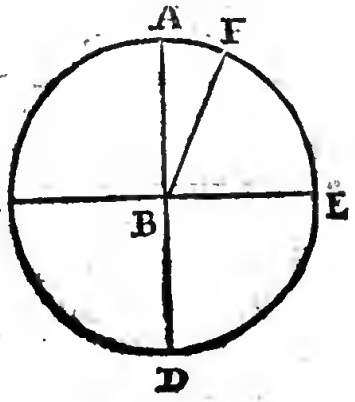
Il y a de trois ſortes d'angles, par rapport à leur ouverture ou au cercle, qui ſont, l'angle droit, l'angle aigu, & l'angle obtus.

DEFINITION I.

12 *Un angle qui a pour ſa meſure la moitié de la demie circonference, ou le quart de l'entiere circon-*

conference du cercle, c'eſt-à-dire un arc de quatre-vingt-dix degrez, s'appelle Angle droit.

Ainſi ſuppoſant que l'arc *AC* eſt le quart de la circonference *ACDE*, & par conſéquent de nonante degrez, qui ſont le quart de trois cens ſoixante degrez que vaut tout le cercle *, l'angle *ABC* qui a pour meſure cet arc *AC*, eſt droit.



DEFINITION II.

Un angle qui a pour ſa meſure un arc de plus de nonante degrez, eſt dit obtus. 13

L'angle *FBC* eſt obtus, *fig. preced.* l'arc *FC* qui le meſure, étant de plus de nonante degrez, puiſqu'il eſt plus grand que le quart du cercle *AC*.

DEFINITION III.

Un angle qui a pour ſa meſure un arc qui a moins de nonante degrez, eſt appellé aigu. 14

L'angle *FBE* eſt aigu, ayant pour ſa meſure l'arc *FE*, moindre que l'arc *AE* de nonante degrez, *même figure.* L'angle aigu peut diminuer à l'infini. Mais l'obtus ne peut augmenter que juſqu'à ce qu'il s'approche infiniment de deux angles droits.

DEFINITION IV.

L'angle aigu qui avec l'obtus vaut deux droits, eſt appellé le complément de l'angle obtus au demi cercle. 15

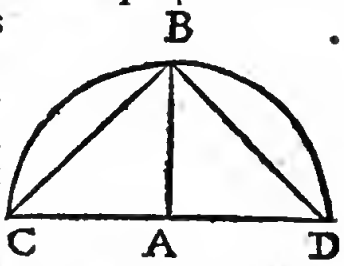
Ainſi, *figure précédente*, l'Angle *FBE* eſt le complément de l'angle obtus *CBF*.

* *L. 1. n. 27.*

THEOREME I.

16 *Une ligne perpendiculaire ſur une autre ligne, fait avec elle deux angles droits; & ſi elle fait deux angles droits, elle eſt perpendiculaire.*

1°. *BA* eſt perpendiculaire ſur *A* milieu de *CD*; d'où comme centre ayant décrit le demi cercle *CBD*, par la notion de la perpendiculaire, les lignes ou cordes *BC* & *BD* ſont égales [a]; ainſi les arcs qu'elles ſoutiennent ſont égaux [b]: & partant puiſque *CBD* eſt la moitié de la circonference, *CD* étant le diametre du cercle, les arcs *BC* & *BD* en ſeront le quart; donc les angles *BAC* & *BAD* ayant chacun pour meſure le quart de cercle, ils ſont droits [c].

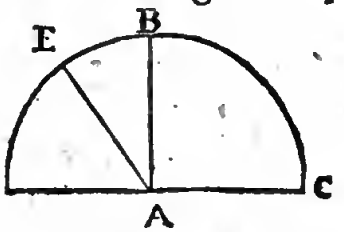


2°. Il eſt facile de démontrer la ſeconde partie; car ſi les deux angles *CAB* & *DAB* ſont droits, les arcs *BC* & *BD* ſont égaux, moitié chacun de la demie circonference [d]; mais *A* & *B* étant ainſi en égale diſtance de *C* & de *D*, la ligne *AB* eſt perpendiculaire [e].

THEOREME II.

17 *Toute ligne tombant ſur une autre, forme deux angles égaux à deux droits.* Eucl. I. Prop. 13.

Soit la ligne *EA*, qui tombe ſur la ligne *DC*, je dis que l'angle *DAE*, plus l'angle *EAC* valent deux droits. Car du point *A* comme centre, ayant décrit le demi cercle *DEC*, & élevé la perpendiculaire *AB*, ſoit que l'angle *DAE* ſoit droit,



a *L.* 1. *n.* 50. b *L.* 1. *n.* 31. c *ſup. n.* 12.
d *ſup. n.* 12. e *L.* 1. *n.* 43.

droit, obtus, ou aigu ſuivant les Définitions *, il a pour ſa meſure l'arc *DE*, & l'angle *EAC* a pour la ſienne l'arc *EC* †; ces deux arcs font enſemble la demie circonference du cercle égale à 180 degrez, ou à deux droits ‡.

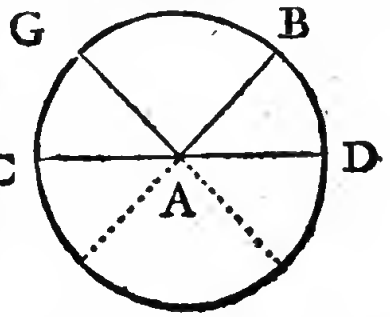
COROLLAIRE I.

Il eſt évident qu'une infinité de lignes tombant ſur une autre ligne dans le même point, formeront des angles qui tous enſemble ne vaudront que deux droits. 18

COROLLAIRE II.

Ainſi deux ou pluſieurs lignes ſe coupant en un point lors qu'elles ſont prolongées, forment des angles qui tous enſemble ne vaudront que quatre angles droits. 19

Qu'on conçoive tant de lignes qu'on voudra, qui tombent ſur *CD* au point *A*. De ce point comme centre ayant décrit un cercle, la meſure de tous ces angles ſera la demie circonference *CGBD*, qui eſt la meſure de deux angles droits. Ayant prolongé les côtez *AB*, & *AG*, les angles qu'ils feront ſeront auſſi égaux à deux droits: Donc tous les angles qui ſe peuvent faire autour de *A* ſont égaux à quatre droits.

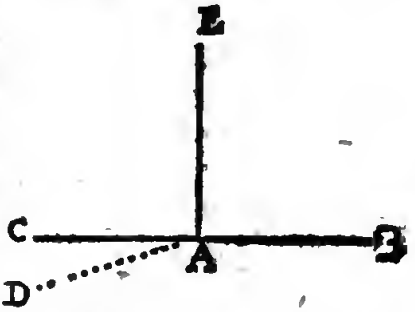


THEOREME III.

Si à un point de quelque ligne droite ſe rencontrent deux autres lignes droites, faiſant avec elle de part & d'autre deux angles égaux à deux droits, ces deux lignes ſe rencontreront directement. Euclid. I. Prop. 14. 20

* *ſup. n.* 12. 13. & 14. † *ſup. n.* 10. ‡ *ſup. n.* 12.

Les deux lignes droites *AB* & *AC* ſe rencontrent au point *A* de la ligne droite *AE*, & font de part & d'autre de cette ligne les deux angles *EAB* & *EAC* égaux à deux droits : il faut prouver qu'elles ſe rencontrent directement, c'eſt-à-dire qu'elles ne font enſemble qu'une ſeule ligne droite.



Soient *BAE* + *CAE* égaux à deux droits. Si on dit que *BA* & *AC* ne font pas une ſeule ligne, & que *BA* étant prolongée va en *D* ; donc par le Theorême précédent les angles *BAE* & *EAD* vaudront deux droits ; donc *EAD* = *EAC* ; ce qui eſt abſurde.

THEOREME IV.

21 *Deux lignes qui ſe coupent ſont les angles oppoſez au ſommet égaux.* Eucl. I. Prop. 15.

Les deux lignes *BC* & *ED* ſe coupent au point *A*. Je dis que les angles *DAC* & *BAE* ſont égaux, comme auſſi *DAB* & *CAE*.

BAD & *DAC* valent deux droits ; *DAB* & *EAB* valent auſſi deux droits * ; donc *BAD* + *DAC* = *BAD* + *EAB* ; ôtant de ces deux valeurs égales l'angle commun *BAD*, les reſtes *EAD* & *DAC* ſeront égaux. Par le même raiſonnement, on fait voir que *BAD* = *EAC*.

DEFINITION IV.

22 *Le Sinus d'un arc, eſt la moitié de la corde du*

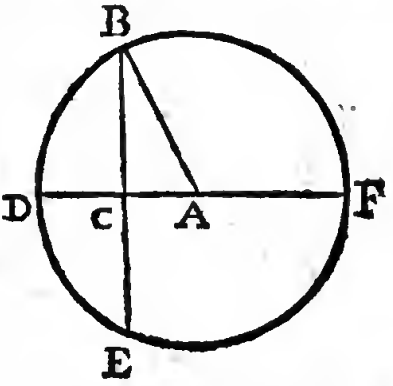
* *ſup.* n. 17.

du double de cet arc, ou la perpendiculaire abaiſſée de l'extremité de cet arc ſur le rayon.

L'arc *EB*, *Figure ſuivante*, eſt le double de l'arc *BD*; la ligne *BC*, moitié de *BE* corde de *BDE* eſt ſinus tant de l'arc *BD* que de l'arc *BF*, ſon complément au demi cercle; ainſi les arcs *DE* & *BF* égaux enſemble au demi cercle ont un même ſinus, & ſont réciproquement complément l'un de l'autre au demi cercle.

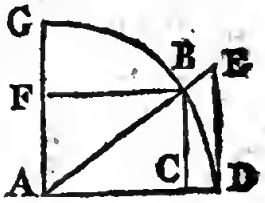
DEFINITION V.

Le ſinus d'un angle eſt le ſinus de l'arc qui le meſure. 23



Ainſi *BC* qui eſt ſinus de l'arc *BD*, meſure de l'angle *BAD*, eſt le ſinus de cet angle. Lorſqu'un angle eſt obtus, ſon ſinus eſt auſſi le ſinus de l'angle aigu, qui eſt ſon complément au demi cercle; ainſi *BC* eſt ſinus de l'angle obtus *BAF* auſſi-bien que de l'angle aigu *BAD*. Mais dans la ſuite l'on ne conſidere que les ſinus des angles aigus, s'il n'eſt autrement expliqué.

BC *étant le ſinus de l'angle* BAD, *on appelle* CD *compris entre* BC *& l'arc* BD, *le ſinus verſe de cet arc* BD; *donc* BC *eſt le ſinus qu'on nomme ſinus droit, ou ſimplement ſinus*, CD *étant toujours diſtingué par ſinus verſe. La ligne* DE *qui touche l'arc* ED, *& qui eſt terminée par* AE *&* AD *qui comprennent le même arc, ſe nomme tangente de cet arc & de l'angle* BAD; *la ligne* AE

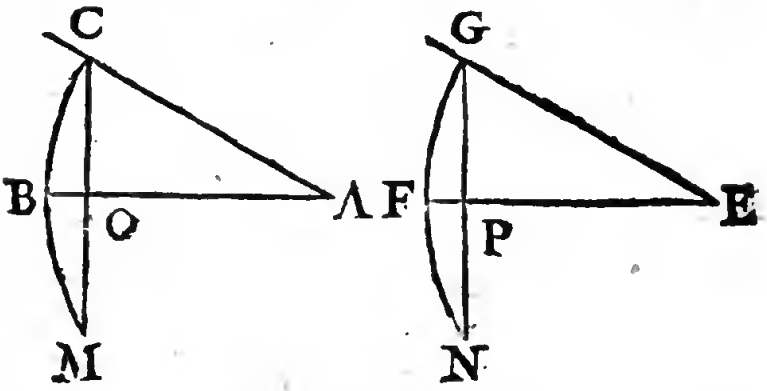


s'appelle sécante de cet angle & de cet arc. On a supputé les rapports ou raisons qu'ont tous les differens sinus avec le rayon le supposant de tant de parties, par exemple de 10000. *Il y a des Tables de toutes ces supputations, dont on retire de grands avantages, qui sont expliquées dans l'explication & l'usage de ces Tables.*

THEOREME V.

24 *Les angles égaux ont des sinus égaux; & si les sinus sont égaux, les angles sont égaux.*

1°. Les angles *CAB* & *GEF* sont égaux. Ainsi de leur sommet *A* & *E*, & d'un interval-



le égal, ayant fait les arcs *CB*, *GF*, qui mesurent ces angles, ces arcs seront égaux *. Je les continue de sorte que *CB=BM* & *GF=FN*: donc puisque les arcs égaux ont des cordes égales †, *CM = GN*; & par conséquent *CO* & *GP* les moitiés de ces cordes sont égales; or ces moitiés sont les sinus des angles *CAB* & *GEF*, suivant la Définition ‡; donc les sinus de ces angles sont égaux.

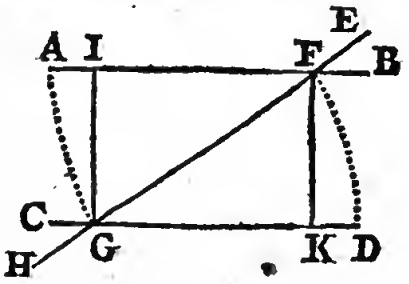
Si les sinus *CO* & *GP* sont égaux, *CM=GN* ‡, & partant *CBM = GFN*; donc les angles *CAB* & *GBF* étant mesurez par les moitiés de ces arcs égaux, ils sont égaux.

THEO-

* *sup. n.* 10. † *L.* 1. *n* 31. ‡ *sup. n.* 22. ‡ *sup. n.* 22.

THEOREME VI.

Si une ligne coupe obliquement deux paralleles, elle forme huit angles, dont il y en a quatre d'alternes interieurs, & quatre exterieurs. Je dis que les alternes extérieurs, ou interieurs, ſont égaux. Eucl. I. Prop. 29. 25



Il faut prouver que *AFE* = *HGD*, & que *AFG* = *FGD*. Les deux premiers ſont alternes exterieurs, & deux les autres alternes interieurs.

DEMONSTRATION.

Je mene entre les deux paralleles les perpendiculaires *FK* & *GI*, qui ſont égales [a]. D'un même intervalle *GF*, & des centres *F* & *G* je fais les arcs *AG* & *DF*, meſure des angles *AFG* & *FGD*. Les ſinus de ces arcs ou angles ſont les perpendiculaires égales *GI* & *FK* [b]. Ces angles ſont donc égaux [c], & *AFE* & *AFG* valent deux droits [d], comme *FGD* & *DGH*; ainſi *AFE* + *AFG* = *FGD* + *DGH*. Otant de part & d'autre les angles égaux *AFG* & *FGD*, reſtera *AFE* = *DGH*.

AUTRE DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit que *AB* tombe toujours parallelement à elle-même juſqu'à ce qu'elle arrive à *CD*, & que le point *F* s'uniſſe avec le point *G*; il eſt clair qu'elle la couvrira parfaitement. Alors l'angle *AFE* deviendra *CGF*; mais *CGF* = *HGD* [e]. Il en eſt de même des autres.

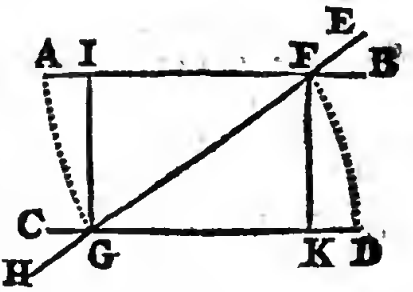
THEOREME VII.

Si une ligne joignant deux autres lignes fait les 26

a *L.* 1. *n.* 65. b *ſup. n.* 23. c *ſup. n.* 24. d *ſup. n.* 17. e *ſup. n.* 21.

angles alternes égaux, ces deux lignes ſont paralleles. Eucl. I. Prop. 27.

Si *AFG* & *FGD* (*même figure*) ſont égaux, leurs ſinus *GI* & *FK* ſont égaux [a], *GI* eſt perpendiculaire ſur *AB*, & *FK* ſur *CD*, par la Définition des ſinus [b]; partant les deux lignes *AB* & *CD* [c], ſont paralleles.

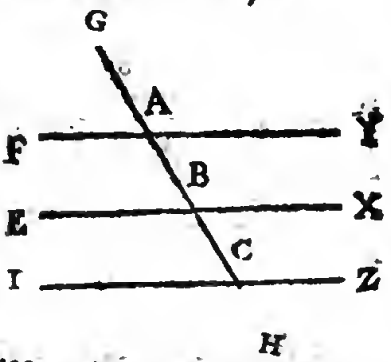


THEOREME VIII.

27 *Une ligne coupant deux ou pluſieurs paralleles, tous les angles qu'elle fait avec elles d'une même part, ſont égaux.*

Il faut prouver que $GAY = ABX = BCZ$, que $YAB = XBC = ZCH$, & qu'il en eſt de même de l'autre part, que $GAF = ABE = BCI$, & $FAB = EBC = ICH$.

1°. $ZCB = CBE$ [d], & $CBE = ABX$ [e]: Donc $ZCB = CBE = XBA$. Ainſi ſelon l'Axiome que deux grandeurs égales à une troiſieme, ſont égales, $ZCB = XBA$. On démontrera de même que $GAY = ABX$, & le reſte.



THEOREME IX.

28 *Si une ligne tombant ſur pluſieurs autres lignes fait avec elles des angles égaux pris du même ſens, ces lignes ſeront paralleles.* Eucl. I. Prop. 28.

$GAY + YAB$, (*fig. précéd.*) valent deux droits, comme auſſi $GBX + GBE$ [f]. Otant donc de ces deux touts égaux les angles GAY & GBX

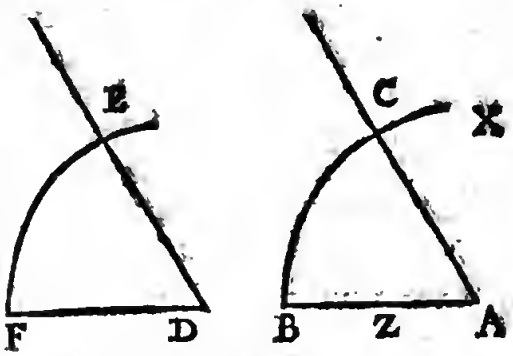
a *ſup. n.* 24. b *ſup. n.* 22. c *L.* 1. *n.* 71.
d *ſup. n.* 25. e *ſup. n.* 21. f *ſup. n.* 17.

GBX qu'on ſuppoſe égaux, les angles alternes *YAB* & *GBE* reſteront égaux. Donc * les lignes *Y* & *X* ſont paralleles. On démontrera de la même maniere que *Y* & *Z*, ou *X* & *Z* ſont paralleles.

PROBLEME I.

D'un point donné ſur une ligne droite, décrire un angle rectiligne égal à un angle donné. Euclid. I. Prop. 2. 29

Du point donné *A* ſur la droite *Z*, il faut décrire l'angle *CAB* égal à l'angle *EDF*. Du point *D*, comme centre, je fais l'arc *EF*; après du point donné *A* comme centre, & de l'intervalle *DE*, je fais le cercle *X*, dont je prens l'arc *BC* égal à l'arc *EF*, au moyen des cordes égales *EF*, *BC* †; enſuite menant de *C* au point *A* une ligne droite, l'angle *CAB* ſera celui que l'on propoſoit de faire égal à *EDF*; car ils ont pour meſure des arcs égaux; ainſi ils ſont égaux ‡.



PROBLEME II.

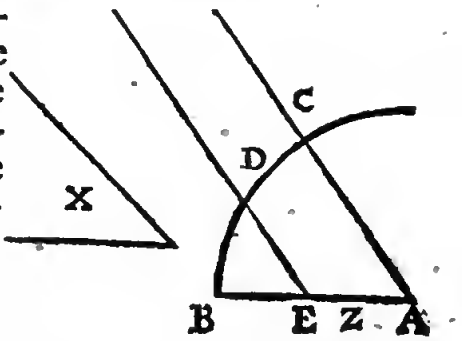
D'un point donné hors d'une ligne mener une ligne droite ſur une autre, qui faſſe avec elle un angle égal à un angle donné. 30

Soit donné le point *D* duquel il faut mener une ligne droite ſur *Z*, qui faſſe avec elle un angle égal à *X*.

Sur *Z* dans quelque point que ce ſoit pris à diſcretion, j'éleve une ligne telle que *AC*, qui par

* *ſup. n.* 26. † *L.* 1. *n.* 31. ‡ *ſup. n.* 10.

par le Problême précédent faſſe l'angle *CAB* égal à l'angle donné *X*. Si cette ligne paſſe par le point *D*, le Problême eſt achevé.

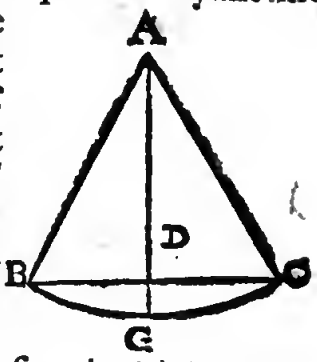


Si elle n'y paſſe pas, je mene par *D* une ligne parallele à *CA* [a], donc *DEB* = *CAB* = *X* [b]. Ainſi *DEB* = *X*.

Probleme III.

31 *Couper un angle en deux parties égales.* Euclid. I. Prop. 9.

L'angle donné eſt *BAC*; ayant fait ſes deux côtez *AB* & *AC* égaux, il faut les joindre par la ligne *BC*, ſur laquelle, & du point *A* ayant mené une perpendiculaire *AG* [c], *BD* = *DC* [d]; partant concevant que l'arc *BGC* eſt partie d'un cercle dont *A* eſt le centre, *AB* & *AC* les rayons, & *BC* la corde coupée en deux également par ladite perpendiculaire *AG*, l'arc *BC* le ſera auſſi au point *G* [e]; ainſi l'arc *BG* ſera égal à l'arc *GC*: & partant les angles *BAG*, *GAC* qu'ils meſurent [f] ſeront égaux. Donc l'angle *BAC* eſt coupé en deux également.



Theoreme X.

32 *L'angle mixte compris entre le cercle & ſa tangente, eſt plus petit qu'aucun angle rectiligne.* Eucl. III. Prop. 16.

On ne peut mener une ligne droite entre le cer-

a *L.* 1. *n.* 72. b *ſup. n.* 27. c *L.* 1. *n.* 46. d *L.* 1. *n* 42. e *L.* 1. *n.* 84. f *ſup. n.* 10.

cercle & la tangente *. On ne peut donc diviſer l'angle mixte que fait le cercle avec ſa tangente; ainſi cet angle eſt plus petit qu'aucun angle rectiligne.

AVERTISSEMENT.

C'a été une grande diſpute, ſi l'angle étoit une quantité qui ſe pût diviſer; & ce qui en a fait douter, c'eſt la mauvaiſe définition qu'Euclide en donne. L'idée que nous en avons donnée en le définiſſant, l'ouverture des deux lignes qui ſe rencontrent indirectement, *renferme un eſpace, & par conſéquent une grandeur diviſible.*

SECTION II.

De la comparaiſon des Angles, & de leur differente poſition au regard d'un Cercle.

AVERTISSEMENT.

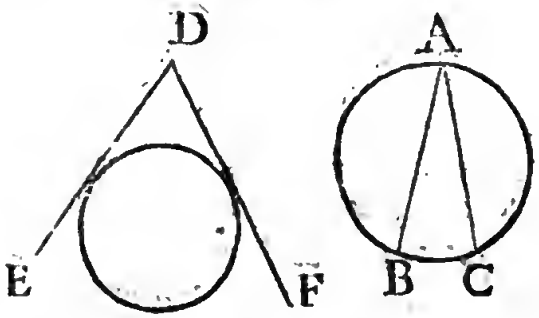
La meſure d'un angle, comme nous avons dit, eſt l'arc du cercle qui a pour centre le ſommet dudit angle, & pour termes les côtez qui le forment. Or le ſommet d'un angle peut ſe trouver dans un cercle au centre, ou hors le centre: dans la circonference, ou hors la circonſerence; & en tous ces cas, quoique ce ſoit toujours le même angle, il donne lieu à differentes conſiderations.

DEFINITION I.

L'Angle dont le ſommet eſt dans la circonference du cercle, & les côtez dans le cercle, eſt appellé Angle à la circonference, comme BAC. † 33

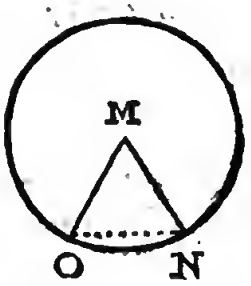
Euclide appelle Angle inſcrit, celui qui eſt dans la circonference; & circonſcrit celui qui eſt hors le cercle, & dont les côtez tou-

* *L. 1. n. 109.* † Voy. la Fig. ſuiv.



touchent le cercle. *BAC* eſt un angle inſcrit, *EDF* eſt circonſcrit.

DEFINITION II.

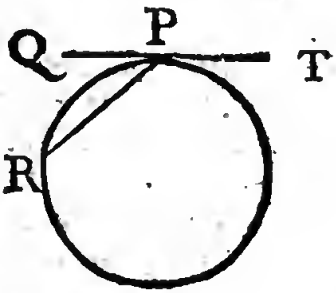


34 *L'angle au centre eſt l'angle dont le ſommet eſt au centre du cercle, & dont les côtez ſont rayons, comme* OMN.

DEFINITION III.

35 *Le ſegment d'un cercle eſt une partie de ce même cercle compriſe entre une corde*, comme dans la figure ſuivante, PR *forment un grand & un petit ſegment.*

DEFINITION IV.



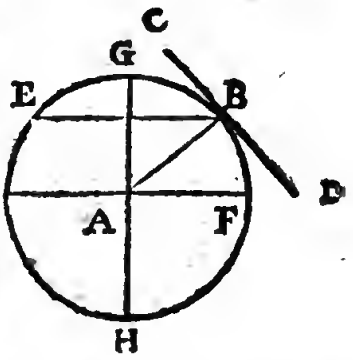
36 *L'Angle formé par une tangente & une corde ou ſécante, tirée du point d'attouchement, eſt nommé Angle du ſegment, comme* QPR *ou* RPT.

THEOREME I.

37 *L'angle du ſegment a pour meſure la moitié de l'arc qu'il comprend entre ſa corde.* Euclid. III. Prop. 32.

Soit

Soit l'angle *CBE*, formé par la tangente *CB*, & par la corde *BE*, il faut prouver qu'il a pour mesure la moitié de l'arc *BE*.



Soit mené le diametre *GH* coupant l'arc & la corde *EB* en deux parties égales ; & soit encore tiré le diametre *AF* parallele à la corde *EB*, & le rayon *AB* passant par le point d'attouchement, il formera l'angle au centre *GAB*, qui a pour mesure l'arc *GB*. Il n'y a donc qu'à prouver que l'angle *CBE* lui est égal : ce qui est évident ; car l'angle *CBA* est droit aussi bien que l'angle *GAF** : mais l'angle *EBA* est égal à l'angle *BAF*, parce qu'ils sont alternes †. Donc ôtant ces deux angles égaux, savoir *FAB* de *GAE* qui est droit, & *ABE* de l'angle droit *ABC*, les restes *BAG* & *CBE* seront égaux. Or *BAG* a pour mesure l'arc *BG* ; donc *CBE* qui lui est égal, a pour sa mesure un arc égal à *BG*, moitié de *BGE* ; ce qu'il falloit prouver.

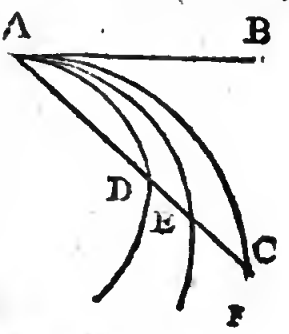
On prouvera par un semblable raisonnement, que l'autre angle *DBE* a pour sa mesure l'arc *BH*, moitié de l'arc *BHE*, compris dans ledit angle entre la tangente *BD* & la corde *BE*, en ajoutant aux angles droits *DBA*, *FAH*, les angles alternes égaux *EBA*, *BAF*, au-lieu que pour la précédente démonstration on les en a retranchez.

Corollaire.

Il est évident que si l'on fait passer entre la tangente & la corde, une infinité de portions de circonfe- 38

* *L.* 1. *n.* 91. & 101. † *sup. n.* 25.

ſerences de cercles, coupées par cette corde prolongée, elles ſeront toutes d'un égal nombre de degrez, puiſqu'elles ſerviront de meſure à un même angle.

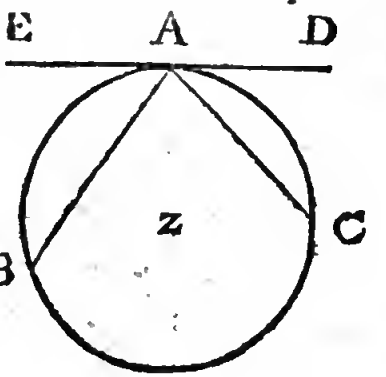


Car l'angle *BAC* ayant pour meſure la moitié de *AD*, de *AE*, de *AF*, &c. s'il étoit par exemple de dix degrez, toutes ces portions ſeroient chacune de vingt degrez.

THEOREME II.

39 *L'Angle à la circonference a pour meſure, la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé.*

Soit l'angle *BAC*. Il faut prouver qu'il a pour meſure la moitié de l'arc *BC*. Soit mené par le point de *A* la touchante *ED*; elle formera deux nouveaux angles *EAB*, & *DAC*, qui par le précédent Théorême auront pour meſure la moitié des arcs *AB*, *AC*; mais les trois angles qui ſe forment au point *A* ſont égaux à deux droits *; donc ils ont pour meſure la moitié de la circonference du cercle †; donc les moitiez des arcs *AB* & *AC* étant meſures des angles *BAE* & *CAD*, la moitié du reſte du cercle, c'eſt-à-dire la moitié de *BC*, ſera la meſure de *BAC*.



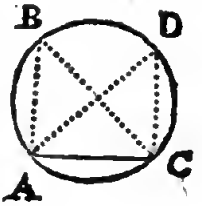
COROLLAIRE I.

40 *Il eſt évident que tous les angles à la circonference d'un cercle, & qui s'appuyent ſur le même arc, ſont égaux.* Eucl. III. Prop. 21.

Ainſi

* *ſup.* n. 18. † *ſup.* n. 12.

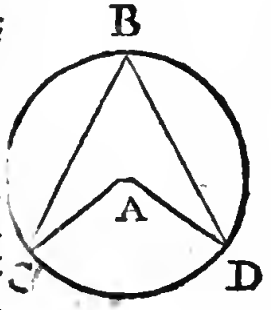
Ainſi les angles *ABC* & *ADC*, en quelque endroit de la circonference *ABDC* qu'ils ſoient, ſont tous égaux; car ils ont tous pour leur meſure la moitié de l'arc *AC*, ſur lequel ils ſont appuyez: partant ayant une même meſure, ils ſont égaux.



COROLLAIRE II.

L'Angle du centre eſt double de l'angle à la circonference qui s'appuye ſur le même arc. Eucl. III. Prop. 20. 41

Soit l'angle *CAD* au centre, & *CBD* à la circonference; il eſt clair que ce premier qui a pour meſure tout l'arc *CD* eſt double de *CBD*, qui n'en a que la moitié.



COROLLAIRE III.

Dans des cercles égaux, les angles égaux (ſoit qu'ils ſoient ou au centre ou à la circonference,) ſont appuyez ſur les arcs égaux. Eucl. III. Prop. 26. 42

Si cela n'étoit pas, ces angles ayant des meſures inégales, ils ſeroient inégaux; & on les ſuppoſe égaux.

COROLLAIRE IV.

Dans des cercles égaux, les angles (ſoit au centre ou à la circonference,) qui ſont appuyez ſur des arcs égaux, ſont égaux. Euclid. III. Prop. 27. 43

Ils ont des meſures égales; ils ſont donc égaux.

COROLLAIRE V.

L'angle à la circonference dans le demi-cercle, ou qui a pour baſe le diametre du cercle, eſt droit. Eucl. III. Prop. 31. 44

Car

Car il eſt appuyé ſur la demie circonference, dont la moitié, qui eſt de nonante degrez, eſt la meſure de l'angle droit *.

COROLLAIRE VI.

45 *L'angle dans le grand ſegment eſt aigu.* Eucl. III. Prop. 31.

Car il eſt appuyé ſur un arc moindre que la demie circonference; ainſi la moitié de cet arc, qui eſt ſa meſure, eſt moins de nonante degrez; partant cet angle eſt aigu †.

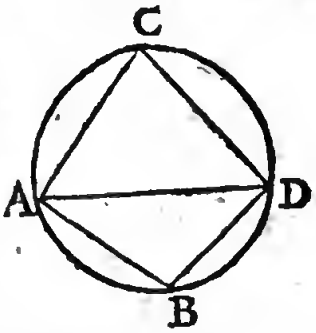
COROLLAIRE VII.

46 *L'angle dans le petit ſegment eſt obtus.* Eucl. III. Prop. 31.

Car il eſt appuyé ſur un arc plus grand que la demie circonference, dont la moitié qui eſt la meſure, eſt de plus de nonante degrez: partant cet angle eſt obtus ‡.

COROLLAIRE VIII.

47 *Les angles à la circonference étant oppoſez, & s'appuyant ſur les mêmes points, ſont égaux à deux droits.*



Soient les angles *ACD*, & *ABD*; il eſt clair qu'ils ont pour meſure la moitié des arcs *ABD*, & *ACD* ‡: & par conſéquent la moitié de toute la circonference, qui vaut deux fois nonante degrez; ainſi ces deux angles ayant pour meſure enſemble la valeur de deux angles droits, ſont égaux à deux droits.

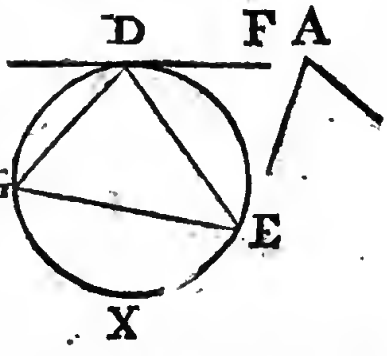
PROBLEME I.

48 *Couper un ſegment dans le cercle, qui ſoit capable d'un angle donné.* Eucl. III. Prop. 34.

Soit

* *ſup.* n. 12. † *ſup.* n. 14. ‡ *ſup.* n. 13. ‡ *ſup.* n. 39.

Soit le cercle *X* duquel il faut retrancher un ſegment capable de contenir un angle égal à l'angle donné *A*, ou ce qui eſt le même, que l'angle qui ſera appuyé ſur l'autre ſegment reſtant ſoit égal à l'angle donné *A*.



Je mene *DF* qui touche le cercle *X* [a], & ſur *DF* je mene *DE* une ſeconde ligne qui faſſe avec *DF* un angle égal à l'angle *A* [b], tout angle inſcrit dans le cercle *X* qui eſt appuyé ſur *DE*, a pour ſa meſure la moitié de l'arc *ED* [c]. Or la moitié de cet arc eſt la meſure de l'angle *EDF*, égal à *A* [d]; donc on a fait ce qui étoit propoſé; c'eſt-à-dire, que tout angle inſcrit dans le cercle *X*, dont la baſe ſera l'arc *DE*, en quelque part de la circonference du cercle que ſoit ſon ſommet, il ſera égal à l'angle *A*.

Probleme II.

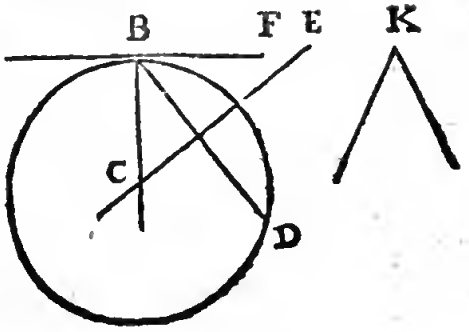
Trouver le cercle dont le ſegment terminé par une ligne donnée, ſoit capable d'un angle égal à un angle donné. Euclid. III. Prop. 33. 49

Sur *BD* ſoit fait l'angle *FBD* égal à l'angle *K* [e], au point *B* ſoit élevée *BC* perpendiculaire ſur *BF* [f], & ſur le milieu de *BD* une autre perpendiculaire *EC*, qui coupera *BC* au point *C*; d'où ayant décrit un cercle de l'intervalle *BC* [g], on aura le cercle que l'on cherchoit; ce qu'il faut prouver.

BF perpendiculaire ſur le rayon *BC*, touche

a *L.* 1. *n.* 112. b *ſup. n.* 29. c *ſup. n.* 39. d *ſup. n.* 37. e *ſup. n.* 29. f *L.* 1. *n.* 47. g *L.* 1. *n.* 30.

che ce cercle *. L'angle *FBD* a pour ſa meſure un arc égal à la moitié de l'arc *BD* †; tous les angles inſcrits dans ce cercle & appuyez ſur *BD* ſont égaux, & ont pour leur meſure la moitié de l'arc *BD* ‡; ils ſont donc égaux à l'angle *FBD*; & partant à l'angle *K*, à qui on a fait égal *FBD*.



AVERTISSEMENT.

De ce que l'on a prouvé que tous les angles appuyez ſur le même arc ſont égaux ‡, *on apprend le moyen de faire une portion de cercle de tant de degrez que l'on voudra, ſans compas, ou ſans avoir le centre de ce cercle, ce qui eſt d'une grande utilité.*

AB *eſt la corde d'un arc propoſé, ou de la portion d'un cercle, laquelle il faut tracer. On veut que cet arc ſoit de dix degrez, ainſi l'angle inſcrit dans cet arc, aura pour ſa meſure la moitié de* 350 *degrez, ou de trois cens ſoixante degrez moins dix, c'eſt à-dire, que cet angle ſera de cent ſoixante quinze degrez. Je diſpoſe donc les deux règles droites* CD *&* CE, *de ſorte que l'angle* DCE *ſoit de cent ſoixante-quinze degrez, & je les joins enſemble. Je plante deux clous à l'extrémité de la corde,* A *&* B, *après quoi tournant le point* C *enſorte que les deux*

* *L.* 1. *n.* 106. † *ſup. n.* 37. ‡ *ſup. n.* 39. ‡ *ſup. n.* 40.

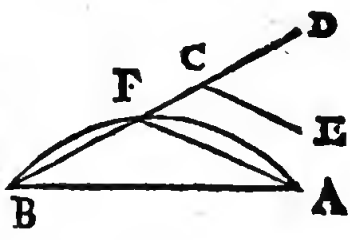
deux règles CD & CE *raſent toujours les clous* A & B; *je décrirai la ligne circulaire* ACB, *qui ſera l'arc que l'on cherchoit.*

Par ce moyen on peut décrire la portion d'un cercle, quelque grandeur que puiſſe avoir ce cercle. Cette operation eſt mécanique; en voici une qui eſt géometrique.

PROBLEME III.

La corde d'un ſegment de cercle étant donnée 50
avec l'angle dans ce ſegment, trouver les points par où paſſe l'arc dont la corde eſt donnée, ſans connoître ni chercher le centre du cercle, dont cet arc eſt partie.

La corde donnée du ſegment qu'on veut décrire, eſt *AB*. Je tire la ligne *BD*, faiſant quelqu'angle avec *BA*. Enſuite dans un point de cette ligne pris à diſcretion, je fais l'angle *ECF* égal à l'angle donné; enſuite je mene par *A* une ligne parallele à *EC*; ainſi l'angle *AFB* eſt égal à *ECF**, & à l'angle donné: partant l'arc propoſé, ſelon ce qui vient d'être démontré, paſſe par *F*. Par une ſemblable operation, je trouve les autres points par où paſſe cet arc, ſans qu'il ſoit néceſſaire de chercher le centre du cercle dont cet arc fait partie.



THEOREME III.

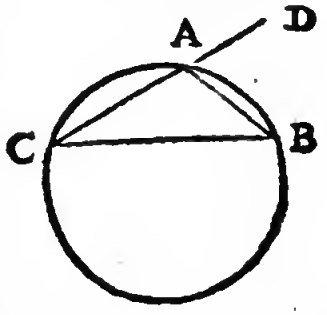
L'angle dont le ſommet eſt dans la circonferen- 51
ce, fait par une corde & par une ſécante prolongée hors le cercle, a pour ſa meſure la moitié de l'arc de la corde, plus la moitié de l'arc de la ſécante.

Soit *AB* une corde, & *CD* une ſécante pro-

D lon-

* *Sup. n.* 37.

longée hors le cercle, dont une partie eſt la corde de l'arc *CA*. Il faut prouver que l'angle *BAD* formé par la corde *AB*, & la ſécante *CD*, a pour ſa meſure la moitié de l'arc *AB*, plus la moitié de l'arc *AC*.

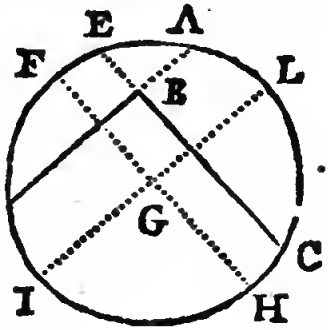


Les deux angles *CAB* & *BAD* ſont enſemble égaux à deux droits [a]; ils ont donc pour leur meſure la moitié de la circonference du cercle [b]; mais l'angle *CAB* a pour ſa meſure la moitié de l'arc *CB* [c]: l'angle *BAD* reſtant aura donc pour ſa meſure les moitiez des arcs reſtans *CA*, *AB* qui avec l'arc *CB* font le cercle entier.

THEOREME IV.

52 *L'angle formé par la ſection de deux cordes qui ſe coupent au dedans d'un cercle, a pour ſa meſure la ſomme des moitiez des arcs ſur leſquels il s'appuye.*

Soit *B* le ſommet de l'angle dans le cercle. Il faut prouver qu'il a pour ſa meſure la moitié des arcs *AE* & *DC*. Si *B* étoit le centre, cela ſeroit évident. Que le point *G* ſoit le centre, je mene par *G* des paralleles aux côtez de l'angle *CBD*. Cet angle eſt égal à l'angle *IGH* [d], dont la meſure eſt l'arc *HI*. Il n'eſt donc queſtion que de prouver que l'arc *HI* eſt la moitié des arcs *DC* & *AE*.



Les

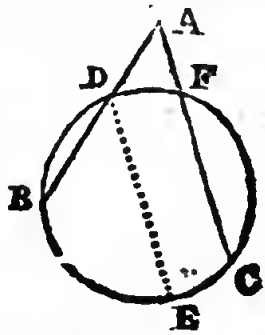
a *ſup.* n. 17. b *ſup.* n. 12. c *ſup.* n. 39. d *ſup.* n. 27.

Les arcs HI & FL ſont égaux [a]. $DI = AL$ & $CH = EF$ [b]. Or $HI = AE + AL + EF$. Comme auſſi $HI = DC - CH$ (ou EF) $- DI$ (ou AL,) c'eſt-à-dire, $HI = DC - EF - AL$. Par conſéquent $HI + HI = AE + AL + EF + CD - EF - AL$. Or $+AL + EF - AL - EF =$ zero. Donc $HI + HI$ (ou $2HI$) $= AE + DC$. Par conſéquent l'arc HI eſt auſſi la moitié des arcs DC & AE, qui ſont ainſi la meſure de l'angle CBD égal à IGH, dont l'arc HI eſt la meſure.

THEOREME V.

L'angle dont le ſommet eſt hors du cercle, mais dont les côtez le traverſent, & s'appuyent ſur la circonference, a pour ſa meſure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe. 53

Soit l'angle BAC. Je dis qu'il a pour meſure la moitié de l'arc BC, moins la moitié de DF.



Je mene par D une parallele à AC [c]; ainſi l'angle BAC eſt égal à BDE [d], qui a pour ſa meſure la moitié de l'arc BE [e]. Les arcs CE & DF ſont égaux [f]. Or $BE = BC - CE$; donc $BE = BC - DF$. Donc la moitié de BE eſt égale à la moitié de $BC - DF$. Ainſi puiſque l'angle BAC a pour ſa meſure la moitié de BE; il a pour meſure la moitié de l'arc concave BC, ſur lequel il eſt appuyé, moins la moitié de l'arc convexe DF: ce qu'il falloit prouver.

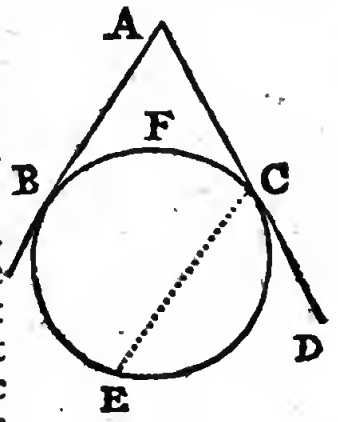
THEOREME VI.

L'angle dont les côtez touchent le cercle, a pour 54

a *ſup.* n. 21. & n. 42. b *L.* 1. n. 86. c *L.* 1. n. 72. d *ſup.* n. 27. e *ſup.* n. 39. f *L.* 1. n. 80.

mesure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe.

Soit l'angle BAC, ſes côtez AB, AC, touchant le cercle. Il faut prouver qu'il a pour meſure la moitié de BEC moins la moitié de BEC.



Je mene par C un des points d'attouchement CE parallele à AB *, l'angle BAC eſt égal à l'angle DCE †. Or DCE a pour ſa meſure la moitié de l'arc CE ‡, qui l'eſt auſſi de CAB : partant reſte à prouver que l'arc $BEC - BFC$ eſt égal à l'arc CE. 1°. L'arc $BEC - BE$ eſt égal à l'arc EC. 2°. Puiſque ‡ l'arc BC eſt égal à l'arc BE: donc $BEC - BFC = EC$; ce qu'il falloit prouver.

SEC-

* *L.* 1. *n.* 72. † *Sup. n.* 27. ‡ *Sup. n.* 37. ‡ *L.* 1. *n.* 16.

SECTION III.

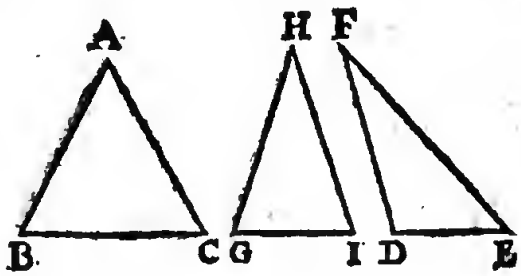
Des Triangles.

DEFINITION I.

LE triangle eſt une ſurface bornée par trois lignes. Il y en a de ſix eſpeces: trois par rapport aux côtez, & trois par rapport aux angles. 55

DEFINITION II.

Le triangle qui a ſes trois côtez égaux eſt appellé équilateral, comme ABC. 56



DEFINITION III.

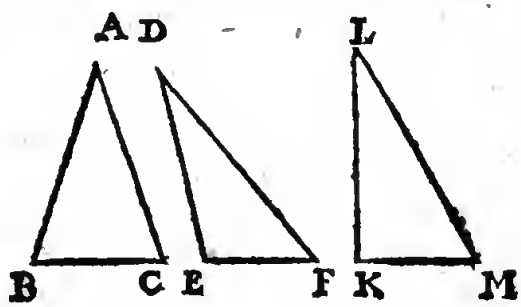
Le triangle qui a ſeulement deux côtez égaux eſt nommé Iſoſcele, comme HGI. fig. précéd. 57

DEFINITION IV.

Le triangle dont les côtez ſon inégaux eſt nommé Scalene, comme DEF. fig. précédente. 58

DEFINITION V.

Le triangle qui a un angle droit, eſt appellé Rectangle, comme LKM. 59



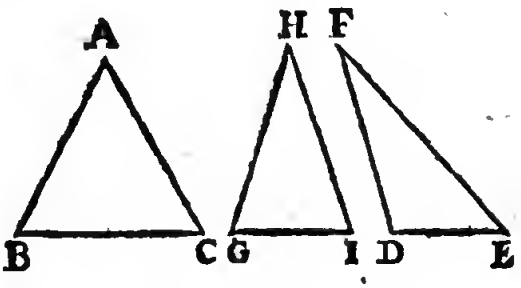
DEFINITION VI.

Le triangle qui a un angle obtus, eſt nommé 60

Obtusangle, ou Ambligone, comme DEF.

DEFINITION VII.

61 *Le triangle qui a tous ſes angles aigus eſt appellé Acutangle, ou Oxygone: comme* ABC.



DEFINITION VIII.

62 *Un triangle eſt dit inſcrit dans le cercle, lorſque le ſommet de ſes trois angles eſt dans la circonference de ce cercle, & alors ce cercle eſt dit Circonſcrit à ce triangle.*

DEFINITION IX.

63 *Un triangle eſt dit circonſcrit à un cercle, lorſque ſes angles ſont hors du cercle, & que ſes côtez touchent ce cercle; & alors ce cercle eſt dit inſcrit dans ce triangle.*

DEFINITION X.

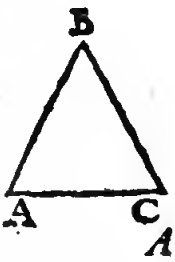
64 *Deux triangles ſont dits équiangles, lorſque les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun.*

DEFINITION XI.

65 *Deux triangles ſont dits entierement égaux, lorſqu'étant équiangles, les côtez qui comprennent les angles de l'un ſont égaux aux côtez qui comprennent les angles de l'autre, chacun à chacun.*

THEOREME I.

66 *Dans un triangle deux de ſes côtez, quels qu'ils ſoient, ſont plus grands que le troiſieme.* Eucl. I. Prop. 20.



AB+*BC* ſont plus grands que *AC*: On a dit qu'entre deux points

A

A & *C* on ne peut concevoir aucune ligne plus courte que la droite *AC* *.

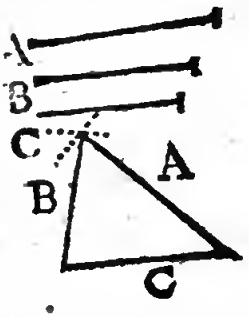
COROLLAIRE.

Ainſi on ne peut faire un triangle de trois lignes données, ſi deux de ces lignes ne ſont plus grandes que la troiſieme. Eucl. I. Prop. 22. 67

PROBLEME I.

Trois lignes étant données, en former un triangle. Eucl. I. Prop. 1. & 22. 68

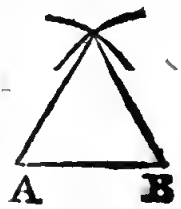
Soient les trois lignes données *A*, *B*, *C*. D'une des extrémitez de ces trois lignes, par exemple de *C*, je fais un arc de l'intervalle de *A*; & de l'autre extrémité, je fais un autre arc de l'intervalle de *B*; enſuite ayant mené du point où ces deux arcs ſe coupent, les deux lignes *A* & *B* aux extrémitez de *C*, le triangle ſera fait, dont les côtez par la conſtruction ſeront égaux aux lignes données.



PROBLEME II.

Sur une ligne donnée décrire un triangle équilateral. 69

Soit la ligne donnée *AB*. Il faut de l'ouverture de cette ligne, & de ſes extrémitez *A* & *B* comme centres, décrire deux arcs; du point où ils ſe couperont, menant des lignes par *A* & par *B*, on aura un triangle équilateral.



PROBLEME III.

Circonſcrire un cercle à un triangle donné. Eucl. IV. Prop. 5. 70

* L. I. n. 12.

C'eſt la même choſe que de faire paſſer un cercle par trois points donnez *.

COROLLAIRE

71 *Il eſt évident que pour trouver un point également éloigné de trois points donnez, qui ne ſont pas ſur une même ligne, il faut décrire par ces trois points un cercle; le centre de ce cercle ſera le point qu'on cherche.*

DEFINITION XII.

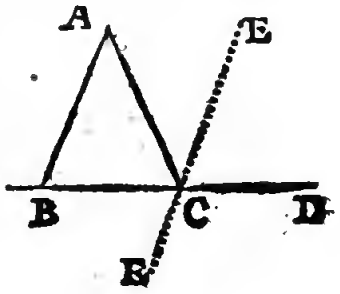
72 *L'on appelle angle extérieur de tout triangle, l'angle formé par le prolongement d'un des côtez.*

Dans le triangle *BAC*, *figure ſuivante*, ayant prolongé *BC* en *D*, l'angle *ACD* eſt nommé l'angle extérieur, conſideré comme oppoſé aux deux intérieurs *CAB* & *ABC*.

THEOREME II.

73 *L'angle extérieur d'un triangle eſt égal aux deux intérieurs oppoſez.* Eucl. I. Prop. 32.

Je mene *CE* parallelement à *AB*, & je partage ainſi l'angle extérieur *ACD* en deux angles *ACE* & *ECD*, qu'il faut prouver égaux aux deux intérieurs oppoſez, ce qui eſt évident; car *ABC* = *ECD* †, & *BAC* = *ACE* ‡.



COROLLAIRE.

74 *Donc l'angle extérieur eſt plus grand qu'aucun des intérieurs oppoſez.* Eucl. I. Prop. 16.

Il faut bien que cela ſoit, puiſque cet angle extérieur eſt égal aux deux intérieurs oppoſez, ainſi qu'on vient de le démontrer.

THEOREME III.

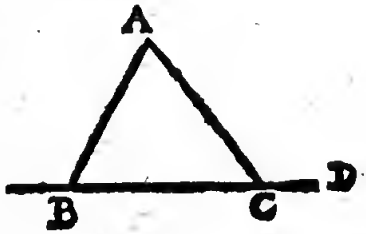
75 *Les trois angles d'un triangle ſont enſemble égaux.*

* *L.* 1. *n.* 87. † *ſup. n.* 27. ‡ *ſup. n.* 28.

égaux à deux angles droits. Eucl. I. Prop. 32.

Pour le démontrer, je circonſcris un cercle au triangle donné [a]. Ses trois angles ont pour meſure la moitié des arcs qui les ſoutiennent [b]; ainſi ils ont pour meſure la moitié de la circonference du cercle, c'eſt-à-dire 180 degrez, valeur de deux angles droits [c].

AUTRE DEMONSTRATION.



Les deux angles *ACB* & *ACD* valent deux angles droits [d]; mais *ACD* angle extérieur, eſt égal aux deux oppoſez intérieurs *ABC* & *CAB* [e]; donc ces deux angles avec *ABC* ſont égaux à deux angles droits.

COROLLAIRE I.

Donc connoiſſant les deux angles d'un triangle, on connoit le troiſieme. 76

Car les trois valent 180 degrez: ſi deux valent 160, le troiſieme doit valoir 20.

COROLLAIRE II.

Les trois angles d'un triangle peuvent être aigus. 77

Car on peut partager cent quatre-vingt degrez, valeur des trois angles d'un triangle, en trois parties, dont chacune ſera moindre que la valeur d'un angle obtus ou d'un angle droit, & qui toutes trois ne feront que cent quatre-vingt degrez, valeur de deux angles droits.

COROLLAIRE III.

Dans un triangle il ne peut y avoir plus d'un angle droit, ni plus d'un obtus. 78

Si deux des angles étoient droits, les trois enſemble vaudroient plus de deux droits. Si

a *ſup. n.* 7. b *ſup. n.* 39. c *ſup. n.* 12.
d *ſup. n.* 17. e *ſup. n.* 73.

deux étoient obtus, l'angle obtus étant plus grand que le droit, les trois enſemble vaudroient auſſi davantage que deux droits ; ce qui eſt contre le Théorême précédent.

Corollaire IV.

79 *Deux angles d'un triangle ſont donc néceſſairement aigus, ou plus petits que deux droits.* Eucl. I. Prop. 17.

Cela eſt évident, puiſqu'un triangle ne peut avoir deux de ſes angles, ni droits, ni obtus.

Corollaire V.

80 *Si dans deux triangles, deux angles de l'un ſont égaux à deux angles de l'autre, ils ſont équiangles, c'eſt-à-dire que le troiſieme angle de l'un eſt égal au troiſieme angle de l'autre.*

Car les trois angles de chacun de ces triangles ſont égaux à deux droits ; ainſi puiſque de deux touts égaux, ôtant des parties égales, les reſtes ſont égaux, il faut qu'après avoir ôté de chaque triangle les deux premiers angles de l'un, égaux aux deux premiers de l'autre, le troiſieme angle de l'un qui reſte, ſoit égal au troiſieme angle de l'autre.

Corollaire VI.

81 *Si un triangle a un de ſes angles plus grand que celui d'un autre triangle, les deux autres enſemble ſeront plus petits que les deux autres de celui-là.*

Car ôtant de la valeur de deux droits une plus grande partie, ce qui reſte doit être plus petit, que lorſqu'on ôte moins.

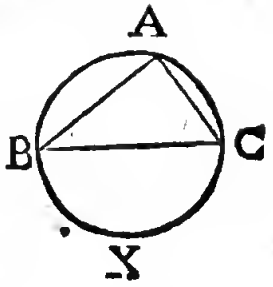
Theoreme IV.

82 *Le triangle ſcalene à ſes trois angles inégaux.*

Soit *ABC* un triangle ſcalene. Je lui circonſcris le cercle *X** : puiſque les trois côtez *AB*, *AC*,

* *ſup. n.* 70.

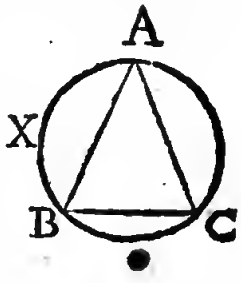
AC, *BC* ſont inégaux, les trois arcs dont ils ſont les cordes ſont inégaux *, par conſéquent les trois angles du triangle *ABC*, qui ont pour meſure la moitié de ces arcs †, ſont inégaux.



THEOREME V.

Dans le triangle iſoſcele, les angles ſur la baſe 83
ſont égaux; & ſi les angles ſur la baſe ſont égaux, le triangle eſt iſoſcele. Eucl. I. Prop. 5.

Soit *ABC* un triangle iſoſcele. Je lui circonſcris le cercle *X*: puiſque *AB*=*AC*, les arcs que ces côtez ſoutiennent ſont égaux. Or la moitié de ces arcs égaux eſt la meſure des angles *ABC* & *ACB* ‡; donc ces angles ſont égaux.



L'autre partie de cette Propoſition eſt facile. Car ſi les deux angles *ABC* & *ACB* ſont égaux, les arcs *AB* & *AC*, ou leurs cordes ſont égales; ainſi le triangle *ABC* eſt iſoſcele.

COROLLAIRE I.

Aucun des angles de la baſe d'un iſoſcele ne peut 84
être droit ni obtus.

Car ſi l'un étoit droit, l'autre le ſeroit auſſi: ainſi ſes trois angles vaudroient plus que deux droits; ce qui ne peut être ‡. Et ſi l'un étoit obtus, l'autre le ſeroit; ainſi deux ſeuls angles de ce triangle vaudroient plus que deux angles droits: ce qui eſt encore plus impoſſible.

COROLLAIRE II.

Si deux triangles iſoſceles ont l'angle de leur ſom- 85
met égal, ou un des deux de leur baſe, ils les ont tous.

* *L.* 1. *n.* 32. † *ſup. n.* 39. ‡ *ſup. n.* 39. ‡ *ſup. n.* 75.

Car 1°. Si cet angle égal eſt ſur la baſe, ils auront le ſecond angle de la baſe égal, partant le troiſieme [a].

2°. Si c'eſt l'angle du ſommet, la valeur des deux angles ſur la baſe de chaque triangle ſera la même; or chacun ſera la moitié de cette même ſomme, ainſi ils ſeront égaux.

THEOREME VI.

86 *Les trois angles d'un triangle équilateral ſont égaux.*

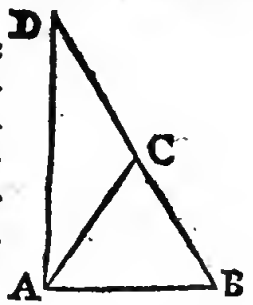
Ayant décrit un cercle à l'entour du triangle équilateral, les arcs dont les côtez de ce triangle ſont les cordes, ſont par conſéquent égaux [b], & leurs moitiez égales. Or ces moitiez ſont la meſure des angles du triangle [c]. Donc tous ces angles ſont égaux.

COROLLAIRE.

87 *Ainſi chaque angle d'un triangle équilateral eſt aigu, & toujours de ſoixante degrez.*

● AVERTISSEMENT.

88 *De ce Corollaire on tire un moyen d'élever autrement qu'il a été enſeigné, une perpendiculaire ſur le point donné d'une ligne, par exemple, ſur le point* A *de la ligne* AB. *Je fais le triangle équilateral* ABC, *enſuite je prolonge* BC *juſqu'en* D, *de ſorte que* CD = CB; *je mene une ligne droite de* D *à* A, *qui ſera perpendiculaire, ſi l'angle* BAD *eſt droit. Or je démontre qu'il l'eſt: car l'angle* ACB *eſt égal aux deux oppoſez* D & A [d] *qui ſont égaux* [e], *puiſque* CD = CA; *ainſi* ACB *étant de* 60 *degrez,* DAC *eſt de* 30, CAB *eſt de* 60; *par-*



a *ſup. n.* 80. b *L.* 1. 21. c *ſup. n.* 39.
d *ſup. n.* 73. e *ſup. n.* 83.

partant l'angle BAD *eſt de* 60 + 30 *ou de* 90 *degrez, valeur de l'angle droit.*

THEOREME VII.

Dans un triangle, le plus grand côté ſoutient le plus grand angle, & le plus grand angle eſt ſoutenu par le plus grand côté. Eucl. I. Prop. 18. & 19. 89

Ayant décrit un cercle à l'entour d'un triangle, le plus grand côté de ce triangle ſoutient le plus grand arc *. Or † la moitié de cet arc meſure l'angle oppoſé à ce plus grand côté; donc cet angle qui eſt meſuré par la moitié du plus grand arc, eſt le plus grand.

Dans un triangle inſcrit dans un cercle, le plus grand angle eſt meſuré par la moitié du plus grand arc. Or ce plus grand arc a la plus grande corde ‡; ainſi le côté oppoſé à cet angle eſt le plus grand.

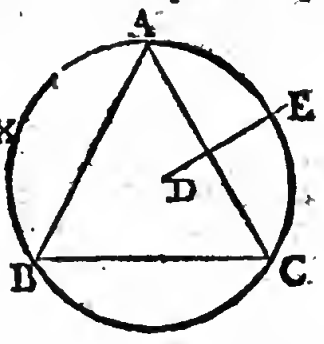
THEOREME VIII.

Dans un triangle, ſi deux de ſes angles ſont égaux, les côtez oppoſez à ces angles ſont égaux. Eucl. I. Prop. 6. 90

Ayant inſcrit ce triangle dans un cercle, ces angles égaux ſeront ſoutenus par des arcs égaux, qui ont des cordes égales, côtez oppoſez à ces angles.

THEOREME IX.

Dans un triangle, la moitié de chaque côté eſt le ſinus de l'angle oppoſé. 91

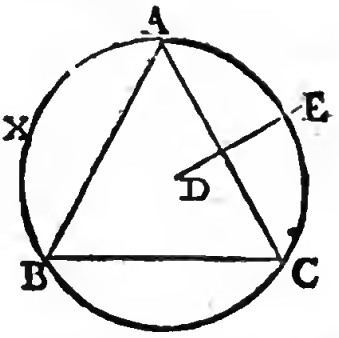


Le triangle *ABC* ſoit inſcrit dans le cercle *X*, il faut démontrer que *AD*, moitié de *AC*, eſt le ſinus de l'angle *ABC*.

L'arc *AE*, moitié de l'arc *AC*, eſt la meſure de l'angle *ABC* ‡; ainſi l'arc

* *L. 1. n. 32.* † *ſup. n. 39.* ‡ *L. 1. n. 32.* ‡ *ſup. n. 39.*

l'arc *AC* eſt double de l'arc, qui eſt la meſure de l'angle *ABC*: Donc *AD* moitié de la corde de l'arc *AC*, eſt le ſinus de l'arc *AE**, & celui de l'angle *ABC*.



On démontre par la même voye que la moitié de *BA* eſt le ſinus de l'angle *ACB*, & la moitié de *BC* celui de *BAC*.

AVERTISSEMENT.

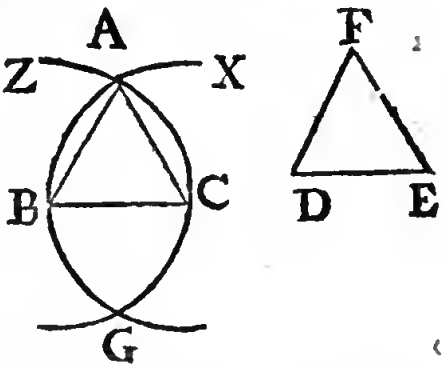
Donc le ſinus d'un angle eſt au côté oppoſé à cet angle, comme le ſinus d'un autre angle eſt à ſon côté oppoſé, ou les ſinus des angles ſont entre eux comme les côtez oppoſez, puiſque les moitiez ſont comme les touts.

THEOREME X.

92 *Deux triangles dont les côtez ſont égaux, ſont équiangles, & entierement égaux.*

Les triangles *ABC* & *DEF* ont leurs côtez égaux. Je dis qu'ils ſont équiangles & entierement égaux: ou ce qui eſt la même choſe, qu'étant poſez l'un ſur l'autre, ils conviennent.

1°. *BC* étant égal à *DE*, il eſt clair que la ligne *DE* étant poſée ſur *BC*, elles conviendront enſemble. Si on dit que *DF* ne conviendra pas avec *AB*, ni *FE* avec *AC*, je démontre le contraire. De *B* comme centre & de l'intervalle *AB* ou *DF*, lignes égales, je décris le cer-



* *ſup. n. 22. & 23.*

cercle *Z*; & de *C* & de l'intervalle *AC* ou *EF*, qui ſont égales, le cercle *X*; ces deux cercles ſe coupent néceſſairement au point *A*.

2°. Il eſt évident que *D* étant poſé ſur *B*, le point *F* ſe trouvera néceſſairement dans le cercle *Z*, & que *E* étant poſé ſur *C*, le point *F* ſe trouvera dans le cercle *X*: le point *F* ſe trouvera donc dans *Z* & *X*, partant dans le point *A* où ces deux cercles ſe coupent; ainſi ces deux triangles poſez l'un ſur l'autre conviendront en tout, & ſeront égaux: ce qu'il falloit démontrer.

On pourroit dire que ces deux cercles *Z* & *X* ſe coupent ailleurs qu'en *A*: il eſt vrai; mais par ce qui a été démontré, ce ne peut être qu'en deux points *, & ce ſecond point eſt néceſſairement au-deſſous de *BC*; ſavoir au point *G*, comme il eſt évident; ainſi s'ils ſe coupoient au-deſſus de *BC* en un autre point qu'en *A*, ils ſe couperoient en trois; ce qui ne peut être †.

Corollaire I.

Si des extrémitez d'une ligne droite on mene deux autres lignes droites qui ſe rencontrent en un point, on ne pourra des mêmes extrémitez, & de même part, mener deux autres lignes droites égales aux deux premieres chacune à la ſienne, qui ſe rencontrent en un autre point. Euclid. I. Prop. 7. 93

Car cela fait deux triangles dont les côtez ſont égaux, qui par conſéquent étant équiangles doivent convenir.

Corollaire II.

Deux triangles qui ont chacun deux côtez égaux aux deux côtez de l'autre, & la baſe égale à la baſe, les angles compris entre les côtez égaux, ſont égaux. Eucl. I. Prop. 8. 94

Ces

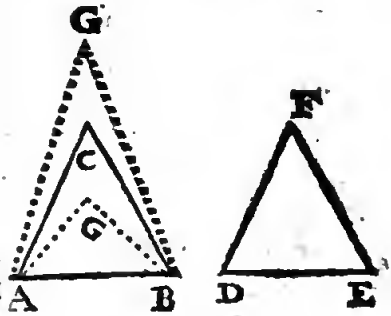
* *L.* 1. *n.* 89. † *L.* 1. *n.* 88.

Ces deux triangles ayant leurs côtez égaux, ſont entierement équiangles.

THEOREME XI.

95 *Deux triangles équiangles, qui ont un côté égal, ſont entierement égaux.*

ABC & *DEF* ſont équiangles, & *AB* = *DE*; je dis qu'ils ſont entierement égaux, car ſi on les poſe l'un ſur l'autre, *DE* conviendra avec *AB*, puiſque ce ſont deux lignes égales. Si *DF* ne convient pas avec *AC*, mais avec *AG*: comme les angles *FDE* & *CAB* ſont égaux, il s'enſuivra que l'angle *CAB* = *GAB* qui ſera le même que *FDE*; ce qui ne pouvant être, il faut reconnoitre que *DF* conviendra avec *AC*, & par la même raiſon *FE* avec *BC*, ainſi le point *F* avec *C*, & par conſéquent ces deux triangles ſont en tout égaux.



COROLLAIRE.

96 *Deux triangles qui ont deux angles égaux & un côté égal, ſont entierement égaux.* Eucl. I. Prop. 26.

Car deux triangles qui ont deux angles égaux, ſont entierement équiangles *. Par conſéquent s'ils ont un côté égal, il faut ſelon ce Théorême, qu'ils ſoient entierement égaux.

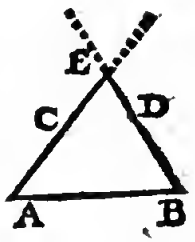
PROBLEME IV.

97 *Faire un triangle dont on a un côté, & les deux angles ſur ce côté.*

Le côté donné eſt *AB*. L'angle au point *A* ſoit nommé *X*, & celui qui doit être ſur *B* ſoit *Z*. J'éleve ſur *A* la ligne *AC* qui faſſe l'angle *CAB* égal à *X* †, & ſur *B* la ligne *BD* qui faſſe l'angle *ABD* égal à *Z*. Ces deux lignes ſe coupe-

* *ſup.* n. 80. † *ſup.* n. 29.

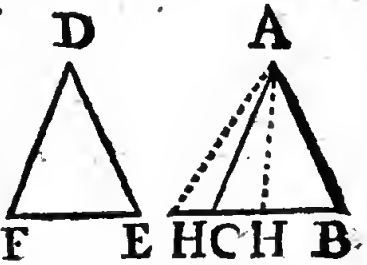
peront, ſi *X* & *Z* ne ſont ni droits ni enſemble plus grands que deux droits; car s'ils l'étoient, le Problême ſeroit impoſſible *, & ces deux lignes ne ſe couperoient point mais ſeroient paralleles †, ou iroient en s'écartant, & il faut qu'elles concourent pour former un triangle tel que *ABE* qui eſt celui qu'on propoſoit de faire. Car 1°. ayant deux angles égaux, il lui eſt équiangle ‡, & ayant un côté égal, ils ſont entierement égaux par le Corollaire précédent.



THEOREME XII.

Deux triangles qui ont un angle égal, & les deux côtez qui comprennent cet angle, égaux, ſont en tout égaux. Eucl. I. Prop. 4. 98

L'angle $BAC = EDF$, & $AB = DE$, & $AC = DF$; je dis que ces deux triangles conviendront étant poſez l'un ſur l'autre: car *DE* conviendra avec *AB*; ſi *DF* ne convenoit pas avec *AC*, mais avec *AH*, l'angle *BAC* ſeroit égal à l'angle *BAH*; ce qui ne peut être: ainſi *DF* convient avec *AC*, & le point *F* avec *C*, par conſéquent $BC = EF$; ainſi ces deux triangles qui ont leurs côtez égaux, ſont équiangles ‡, c'eſt-à-dire, égaux en toutes choſes.



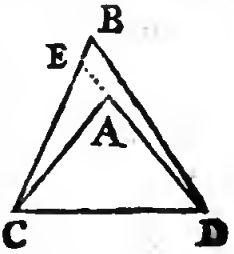
THEOREME XIII.

Deux triangles ayant une même baſe, l'angle du ſommet de celui qui eſt compris, eſt plus grand que l'angle du ſommet du triangle qui le comprend. Eucl. I. Prop. 21. 99

Les deux triangles *CAD* & *CBD*, ont *CD* pour

* *ſup. n.* 79. † *L. I. n.* 68. ‡ *ſup. n.* 80. ‡ *ſup. n.* 92.

pour baſe. *CAD* eſt renfermé dans *CBD*. Il faut prouver que $A > B$.

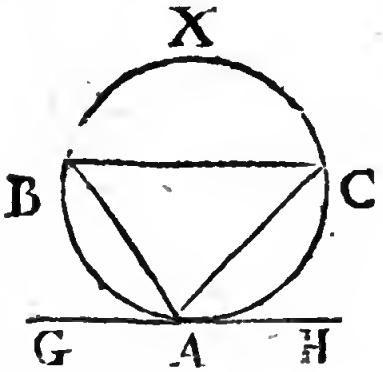


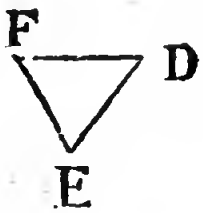
Je prolonge *BA* juſques en *E*. L'angle extérieur *CAD* eſt égal aux oppoſez intérieurs *AEC*, *ECA* *; ainſi il eſt plus grand que chacun d'eux. Par même raiſon $CED = EBD$, *BDE*; ainſi il eſt auſſi plus grand qu'aucun d'eux. *CAD* par conſéquent étant $>$ que *CED*, il eſt $>$ que *CBD*; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME V.

100 *Dans le cercle inſcrire un triangle équiangle à un triangle donné.* Eucl. IV. Prop. 2.

Soit le triangle donné *FED*. Il faut l'inſcrire dans le cercle *BAC*. Je tire la tangente *GH* †; je fais l'angle *GAB* égal à *FDE*, & *CAH* égal





à *DFE* ‡, j'acheve le triangle *ABC* en tirant la ligne *BC*.

Puiſque l'angle *BAG*, dont la meſure eſt la moitié de l'arc *BA* ‡, qui eſt auſſi la meſure de l'angle *BCA*, eſt égal à *FDE*, donc $BCA = FDE$.

Par la même raiſon, *CAH* égal à *DFE*, ayant pour ſa meſure la moitié de l'arc *AC*, meſure de *CBA*, il faut que *CBA* & *DFE* ſoient égaux:

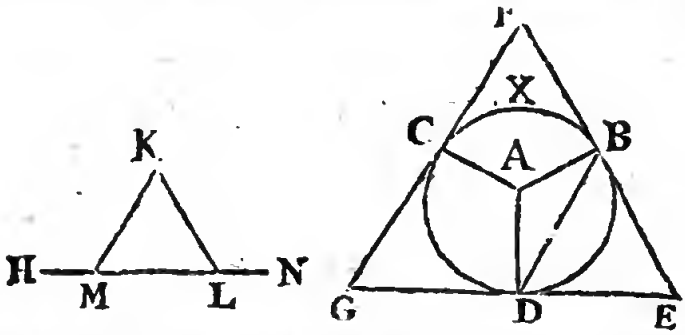
* *ſup.* n. 71. † *L.* 1. *p.* 112. ‡ *ſup.* n. 29. ‡ *ſup.* n. 57.

égaux : ainſi ces deux triangles *ABC* & *EFD*, ayant deux angles égaux, ils ſont entierement équiangles [a] : ayant donc inſcrit ce triangle *ABC*, on aura fait ce qui étoit propoſé.

PROBLEME VI.

A l'entour du cercle décrire un triangle équiangle à un triangle donné, ou circonſcrire au cercle un triangle équiangle à un triangle donné. Eucl. IV. Prop. 3. 101

Le triangle donné eſt *KLM*, & le cercle eſt *X*. Ayant tiré le rayon *AD*, je fais [b] d'une part l'angle $BAD = NLK$, & de l'autre $DAC = KMH$; enſuite ayant mené par les trois points *B*, *D*, *C*, les tangentes *EF*, *FG*, & *GE* [c] : je dis que le triangle *EFG* ſera équiangle à *LKM*.



Les ſix angles des deux triangles *BAD* & *BED* valent quatre angles droits [d] ; *AB* & *AD* étant perpendiculaires, $EBD + ABD$ vaut un droit, $EDB + BDA$ vaut encore un droit. Donc $BED + BAD$ vaut deux droits. Or par la conſtruction $BAD = KLN$, cet angle $KLN + KLM$ vaut deux droits. Donc $BED = KLM$. Par la même voye on démontre que $DGC = KML$, & par conſéquent que $EFG = LKM$, & qu'ainſi les triangles *EFG* & *LKM* ſont équiangles [e].

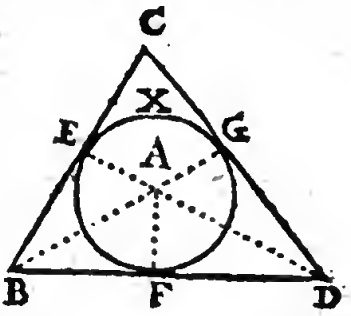
PRO-

a *ſup.* n. 10. b *ſup.* n. 29. c *L.* 1. n. 121.
d *ſup.* n. 75. e *ſup.* n. 60.

PROBLEME VII.

102 *Décrire un cercle dans un triangle.* Eucl. IV. Prop. 4.

Je coupe, comme on l'a enſeigné *, les angles *CBD* & *CDB* en deux parties égales par les lignes *BA* & *DA*: & du point *A* où ces deux lignes ſe coupent, je mene † les perpendiculaires *AE*, *AF*, *AG* ſur les côtez du triangle; enſuite de *A*, & de l'intervalle de l'une de ces lignes, je décris le cercle *X*, qui ſe trouvera inſcrit dans le triangle *BCD*: pour le prouver il faut faire voir que les trois lignes *AE*, *AF*, *AG* ſont égales.



Les deux triangles *AEB* & *AFB* ſont rectangles par la conſtruction, puiſque *AE* & *AF* ont été faites perpendiculaires. Les angles *EBA* & *ABF* ſont égaux par la conſtruction: ainſi ces deux triangles ayant deux angles égaux ſont équiangles ‡. Ils ont le côté *AB* commun. Donc ils ſont entierement égaux ‡. Ainſi *AE*=*AF*: par la même voye on démontrera que *AG* eſt égal à *AF* & à *AE*: ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

103 *Trois lignes étant données, qui ſont un triangle, ſi elles ſont prolongées, on peut trouver un point qui en ſoit également éloigné.*

Le triangle fait, il y faut inſcrire un cercle, dont le centre ſera le point qu'on cherche.

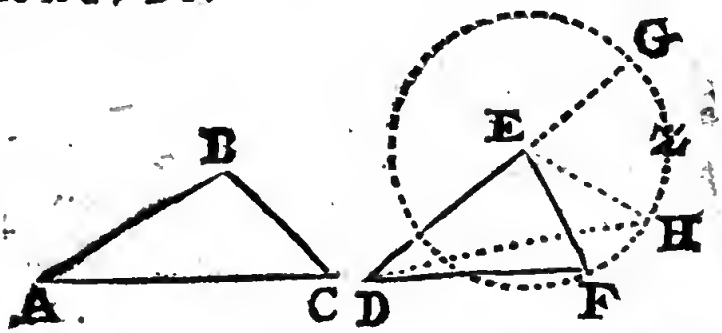
THEOREME XIV.

104 *Deux triangles qui ont deux côtez égaux à deux côtez chacun au ſien, leſquels contiennent des angles in-*

* *ſup. n.* 31. † *L. I. n.* 46. ‡ *ſup. n.* 80. ‡ *ſup. n.* 96.

inégaux, celui qui a le plus grand angle aura auſſi la baſe plus grande, & réciproquement celui qui a la plus grande baſe, aura le plus grand angle. Euclide I. Prop. 24 & 25.

Soient deux triangles *ABC*, *DEF*. Si $AB = DE$, & $BC = EF$, & l'angle $B > E$; je dis la baſe $AC > DF$.



1°. Car ſi on conçoit le triangle *ABC* poſé ſur le triangle *DEF*, en ſorte que les points *A* & *B* conviennent avec *D* & *E*: Comme l'angle *ABC* a été poſé plus grand que l'angle *DEF*, le côté *BC* ne conviendra pas avec *EF*, mais ſera plus proche de *EG* comme en *EH*, & la ligne *DH* ſera égale à *AC**. Conſiderant donc la ligne $EF = EH$ comme tournant circulairement ſur *E*, extrémité de *DE*, en s'approchant par l'autre extrémité *EG* au point *H*, la ligne *DH* qui en joint les autres extrémitez ſera plus grande que *DF*†: ce qu'il falloit premierement démontrer.

2°. On démontrera en la même maniere l'inverſe, ſi on poſe la ligne *AC* ou $DH > DF$, que l'angle $DEH = ABC$ ſera plus grand que l'angle *DEF*, ſi on conſidere que la ligne *EH* eſt plus approchée de *EG* que *EF*, ayant tourné circulairement ſûr le point *E* en la maniere expliquée ‡.

SEC-

* *Sup. n. 98.* † *L. 1. n. 100.* ‡ *L. 1. n. 100.*

SECTION IV.

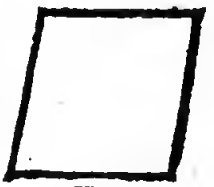
Des Figures de pluſieurs côtez.

DEFINITION I.

105 LES *figures Quadrilateres, ou de quatre côtez, reçoivent differens noms.* 1°. *Si les côtez oppoſez ſont paralleles, c'eſt un* Parallelogramme. 2°. *Si les quatre côtez ſont égaux & tous les angles droits, c'eſt un* Quarré, *comme* A.

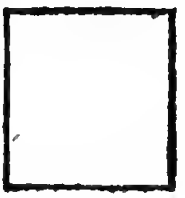
A.

3°. *Si les quatre côtez ſont égaux, & les angles oppoſez auſſi égaux, mais non droits, c'eſt un* Rhombe *ou* Loſange, *comme* B.



B

4°. *Si tous les côtez ne ſont pas égaux, mais tous les angles droits, c'eſt un* Quarré long, oblong, Parallelogramme rectangle, *ou ſimplement* Rectangle, *comme* C.



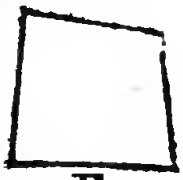
C

5°. *Si ſeulement les côtez oppoſez ſont égaux, & les angles oppoſez auſſi égaux, mais non droits, cette figure eſt* Rhomboïde, *comme* D.

D

6°.

6°. *Tout autre quadrilatere, dont les côtez opposez ne sont ni paralleles ni égaux, s'appelle un* Trapeze, *comme* E.



E

Definition II.

Une figure est dite réguliere, lorsque tous ses 106
côtez & tous ses angles sont égaux.

Definition III.

Une figure de plusieurs côtez se nomme généra- 107
lement Polygone. *Elle prend le nom qui lui est propre, du nombre de ses côtez, ou du nombre de ses angles qui comprennent ses côtez. Ainsi une figure de cinq côtez est nommée* Pentagone; *de six*, Exagone; *de sept*, Eptagone, Octogone, Enneagone, Decagone, Endecagone, Dodecagone; *ainsi de suite.*

Definition IV.

Une figure réguliere est dite inscrite dans un cer- 108
cle, lorsque tous ses angles sont dans la circonference du cercle; mais elle est dite circonscrite, lorsque tous ses côtez touchent la circonference du cercle.

Definition V.

Ayant mené deux lignes des extrémitez d'un des 109
côtez d'une figure réguliere inscrite dans un cercle ou circonscrite, au centre de ce cercle, l'angle que ces lignes font est appellé Angle du centre; & les angles que font ses côtez pris deux à deux, sont nommez Angles de la figure.

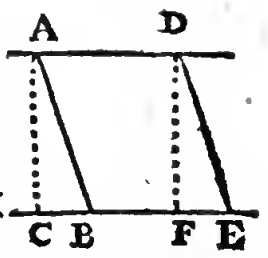
Lemme I.

Les lignes obliques qui font des angles égaux 110
entre les mêmes paralleles, sont égales.

Soient menées les perpendiculaires *AC* & *DF* entre les paralleles *Z* & *X*, elles seront égales *; mais

* *L. 1. n. 65.*

mais les angles *ACB* & *DFE* étant droits, & les angles *ABC* & *DEF* égaux par l'hypotheſe, les deux triangles *ABC* & *DEF* ſont donc équiangles [a]: partant *AC* égal à *DF*, ils ſeront tous égaux [b]; & par conſéquent *AB* = *DE*: ce qu'il falloit démontrer.



Lemme II.

111 *Les lignes qui ſont ſur une même ligne, mêmes angles, ſont paralleles.*

Les lignes *AB* & *DE* ſont ſur *Z* & *X* (*même figure ci-deſſus*) les mêmes angles; ainſi *ABC* = *DEF*: par conſéquent *AB* & *DE* doivent être paralleles [c].

Lemme III.

112 *Deux lignes qui joignent deux lignes égales & paralleles, ſont égales.* Eucl. I. Prop. 33.

Si *AD* & *BE* *fig. précéd.* joignent les deux lignes *AB* & *DE* égales & paralleles, je dis qu'elles ſont auſſi égales. Les perpendiculaires *AC* & *DF* ſont paralleles [d], & *AB* & *DE* étant paralleles, les angles *ABC* & *DEF* ſont égaux [e]. Or *ACB* & *DFE* ſont droits; ainſi ces deux triangles *ABC* & *DEF* étant équiangles [f] & ayant un côté égal, puiſque *AB* = *DE*, ils ſont entierement égaux [g]; partant *BC* = *EF*; donc *CF* = *BE*. Or *AD* & *CF* ſont entre les paralleles *AC* & *DF*, elles ſont égales [h]. Donc *BE* = *CF* = *AD*; ainſi *BE* = *AD*.

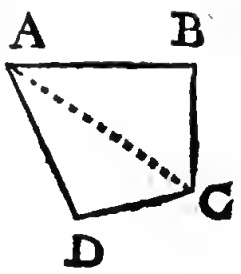
Theoreme I.

113 *Les quatre angles d'un quadrilatere ſont égaux à quatre droits.*

Soit le quadrilatere *ABCB*. Il faut prouver que

a *ſup. n.* 80. b *ſup. n.* 96. c *ſup. n.* 28. d *L.* 1. *n.* 68. e *ſup. n.* 27. f *ſup. n.* 80. g *ſup. n.* 95. h *L.* 1. *n.* 65.

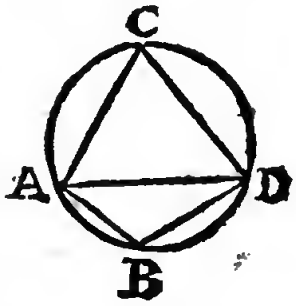
que ſes quatre angles valent quatre angles droits. Ayant mené la ligne *AC* d'un des angles, à l'angle oppoſé, & partagé cette figure dans les deux triangles *ABC* & *ACD*, les angles de chacun deſquels valent deux droits *. Ainſi tous les angles de *ABCD* valent quatre droits.



THEOREME II.

Les angles oppoſez d'un quadrilatere inſcrit dans un cercle, valent deux angles droits. Eucl. III. Prop. 22. 114

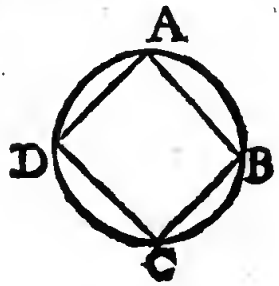
Le quadrilatere *ABCD* eſt inſcrit dans le cercle. Les deux angles oppoſez *ACD* & *ABD*, ont chacun pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel ils ſont appuyez†. Or étant appuyez enſemble ſur toute la circonference, ils ont donc pour meſure la moitié de toute la circonference: donc ils valent deux angles droits ‡. Il en eſt de même pour les deux autres angles *BAC* & *BDC*.



COROLLAIRE.

Si les angles oppoſez d'un quadrilatere ne valent pas deux droits, on ne le peut inſcrire dans un cercle. 115

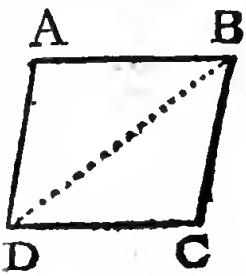
Car ſi on le pouvoit, les angles oppoſez de ce quadrilatere ſeroient égaux à deux droits par ce Théorême. Ils ne le ſeroient pas par la ſuppoſition; ce qui eſt impoſſible.



* *ſup. n. 75.* † *ſup. n. 39.* ‡ *ſup. n. 47.*

THEOREME III.

116 *Si les côtez oppoſez du quadrilatere ſont égaux, ils ſont paralleles.*



$AB=CD$ & $BC=AD$, le côté BD eſt commun; donc ces deux triangles ABD & BCD étant égaux, ſont équiangles [a]. Donc l'angle $ABD=BDC$, partant AB eſt parallele à DC [b]. De même BC ſera parallele à AD, puiſque l'angle ADB eſt égal à DBC.

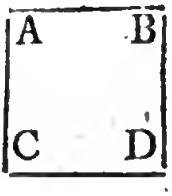
THEOREME IV.

117 *Si deux des côtez oppoſez d'un quadrilatere ſont égaux & paralleles, les deux autres ſont auſſi égaux & paralleles.* Eucl. I. Prop. 23.

Ils ſont égaux [c]; ils ſont paralleles [d].

THEOREME V.

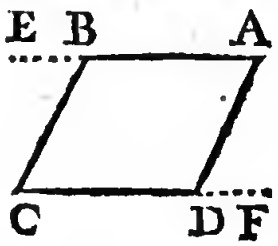
118 *Si les quatre angles du quadrilatere ſont droits, c'eſt un Parallelogramme.*



Car AB & CD, par l'hypotheſe, ſont perpendiculaires ſur AC; partant [e] ils ſont paralleles. AC & BD ſont auſſi perpendiculaires ſur DC; par conſéquent par la même raiſon ces lignes ſont paralleles.

THEOREME VI.

119 *Les angles oppoſez d'un Parallelogramme ſont égaux, & ceux qui ſont proches valent deux droits.*



1°. L'angle $EDA=DCB$ [f], & $EDA=DAB$ [g]. partant puiſque deux angles égaux à un troiſieme, ſont egaux, $DAB=BCD$: Or $EDA+ADC$ valent deux angles droits [h]. Donc

BCD

a *ſup. n.* 94. b *ſup. n.* 26. c *ſup. n.* 112. d *ſup. n.* 116
e *L.* 1 *n* 68. f *ſup. n.* 27. g *ſup. n.* 25. h *ſup. n.* 17.

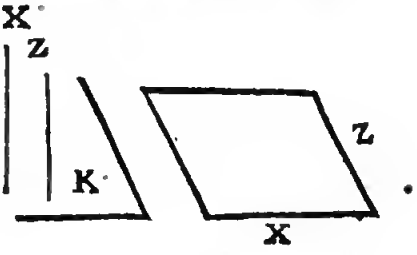
BCD égal à *ADF*, vaut avec *ADC* deux droits.

2°. On démontre de même que les deux angles opposez *ABC* & *ADC* sont égaux, & que *BAD* + *ABC* valent deux droits; ce qu'il falloit démontrer.

Probleme I.

Faire un Parallelogramme dont on a un angle, 120
& les deux côtez qui le comprennent.

Les côtez donnez sont *Z* & *X*, l'angle donné *K*: il faut joindre *Z* & *X*, de sorte qu'ils fassent un angle égal à *K* *, & ensuite tirer deux lignes paralleles à *Z* & à *X* †.



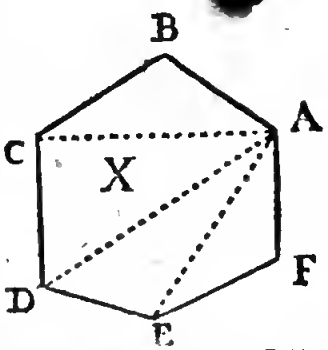
Corollaire.

Donc pour faire un quarré dont on a un côté, 121
il n'est question que de joindre deux lignes égales à celle qui est donnée, de sorte qu'elles fassent un angle droit. Eucl. I. Prop. 46.

Theoreme VII.

Toute figure polygone ou de plusieurs côtez, se 122
réduit en autant de triangles qu'elles a de côtez, moins deux.

Dans la figure Polygone *X*, ayant tiré d'un de ses angles *A*, à tous les autres angles, des lignes droites, on fait plusieurs triangles qui ont pour base les côtez de ce Polygone, à la réserve de deux qui sont aux deux côtez de *A*, dont *AB* & *AF* sont un des côtez. Ainsi il y a autant de triangles, qu'il y a de côtez moins deux.



* *sup. n.* 29. † *L.* 1. *n.* 72.

deux. La même choſe ſe trouve dans tous les Polygones; c'eſt pourquoi on peut dire abſolument qu'un Polygone ſe peut réduire en autant, de triangles qu'il a de côtez, moins deux.

COROLLAIRE.

123 *Donc tous les angles d'une figure de pluſieurs côtez ſont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'elle a de côtez moins quatre.*

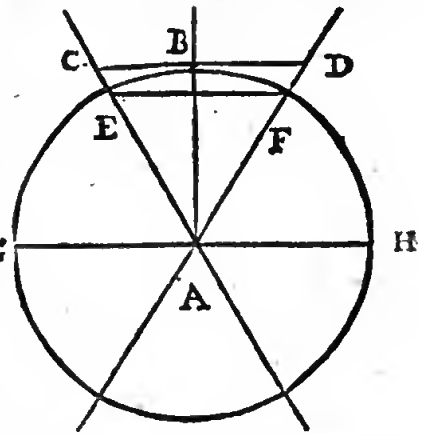
C'eſt-à-dire, que tous les angles de *X* qui a ſix côtez, ſont égaux à huit angles droits. Car ce Polygone ſe réduit en autant de triangles qu'il a de côtez moins deux, c'eſt-à-dire en quatre. Donc puiſque les angles de chaque triangle ſont égaux à deux droits, tous les angles de ces quatre triangles ſeront enſemble égaux à huit droits. Mais ils compoſent enſemble tous les ſix angles de cette figure. Ils ſeront donc égaux à huit droits, c'eſt-à-dire, à douze droits moins quatre. On peut donc dire que tous les angles d'un Chiliogone, c'eſt-à-dire, d'une figure de mille côtez, ſont égaux à mille neuf cens quatre-vingt-ſeize angles droits; ce qu'on conçoit clairement, quoiqu'il ſoit impoſſible d'imaginer nettement un Chiliogone.

AVERTISSEMENT.

On entend par Figures Régulieres, celles dont tous les angles & tous les côtez ſont égaux *, *& qui par conſéquent peuvent être inſcrites dans un cercle, comme eſt la figure ci-jointe d'un hexagone: on nomme l'angle* EAF *l'Angle du centre, parce qu'il eſt formé au centre du cercle par les rayons* AE, AF *tirez aux extrémitez des côtez du Polygone; & les angles ſemblables à* GEF, *formez par la rencontre des côtez du Polygone, ſe nomment Angles du Polygone: Et comme il a été démontré* † *que tous les angles qui ſe forment au point* A, *pris ici pour le centre*

* *ſup. n.* 106. † *ſup. n.* 19.

tre du Polygone, ſont enſemble égaux à quatre droits, lorſqu'on veut ſavoir la grandeur de chaque angle du centre, comme ici dans l'exemple de l'hexagone, il faut diviſer 360 degrez valeur de quatre droits, par ſix, nombres des côtez du Polygone, comme l'enſeigne l'Arithmetique : le nombre de ſoixante qui vient au quotient de la diviſion donnera la valeur de l'angle du centre de l'hexagone. L'angle du centre étant connu, celui du Polygone le ſera auſſi; car comme les trois angles du triangle iſoſcele EAF *ſont enſemble égaux à deux droits* * *ou* 180 *degrez, ôtant l'angle du centre, le reſte ſera la valeur des deux angles égaux ſur la baſe ou côté du Polygone, leſquels ſont égaux au ſeul* GEF *angle dudit Polygone; ainſi celui de l'hexagone ſe trouvera être de* 120 *degrez. On pourroit également le connoître, par ce qui a été démontré* †; *puiſque cet angle* GEF *a pour ſa meſure la moitié de la portion du cercle* GHF, *ſur lequel il eſt appuyé : ainſi ôtant de* 360 *degrez que vaut tout le cercle, la partie* GF, *ſuppoſée ici de* 120, *reſtera* 240, *dont la moitié eſt la valeur de l'angle* GEF *ou du Polygone.*



QUESTION.

Quels ſont les Polygones qui ſe peuvent toucher par leurs angles, ſans laiſſer d'eſpace vuide entre eux.

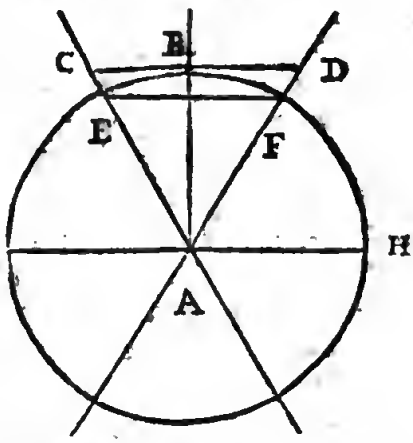
Pour cela il faut que leurs angles qui ſeront autour

* *ſup. n.* 75. † *ſup. n.* 39.

*tour d'un point commun, faſſent préciſément quatre angles droits *. Ainſi il n'y a que les quarrez & les hexagones qui le puiſſent. Les quatre angles de quatre quarrez qui ont un point commun, ſont quatre angles droits. Les trois angles des trois hexagones qui ont un point commun, étant chacun de cent vingt, ſont enſemble trois cens ſoixante, valeur de quatre angles droits.*

Des triangles équilateraux peuvent auſſi le toucher; car en ayant placé ſix autour d'un point, leurs ſix angles qui ſe touchent ſont quatre angles droits.

Lorſqu'on connoit l'angle du centre d'une figure réguliere, on la peut inſcrire dans un cercle. Il faut mener du centre deux rayons qui faſſent un angle tel que doit être l'angle du centre de cette figure; car ſi c'eſt une figure de dix côtez, faiſant un angle de trente-ſix degrez, qui eſt la dixieme partie de trois cens ſoixante, la corde de cet angle ſera un des côtez de cette figure.



Pour circonſcrire un polygone ou figure réguliere autour d'un cercle, il faut premierement l'inſcrire & en prolonger les rayons; après, ayant diviſé par la moitié un des côtez de ce polygone inſcrit, comme EF, *en menant le rayon* AB *par cette moitié, & fait au point* B *une tangente entre* AC *&* AD, *on aura un des côtez du polygone circonſcrit. Enſuite il faut faire tous les rayons prolongez de l'inſcrit égaux à* AC *&* AD, *par l'extrémité deſquels ayant mené des lignes droites, on aura la figure que l'on cherchoit, ainſi qu'il eſt évident. Mais l'on*

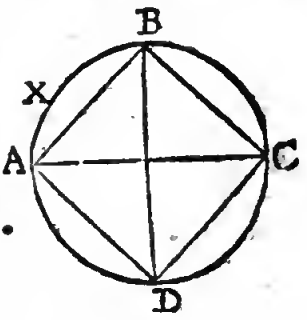
* *Sup. n.* 19.

l'on ne peut faire avec la ſeule règle & le compas l'angle du centre de toute figure réguliere, ſans exception, comme nous le ferons voir; cela ne ſe peut que méchaniquement, en ſe ſervant d'un demi cercle qui eſt diviſé par degrez, qu'on nomme Rapporteur.

PROBLEME II.

Inſcrire un quarré dans le cercle X. Eucl. IV. Prop. 6. 124

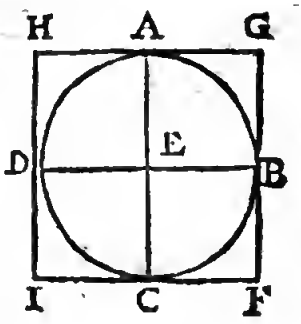
Le cercle *X* eſt donné pour y inſcrire un quarré. Il faut mener une ligne par le centre du cercle, telle que *AC*, qui en ſoit le diametre; & ſur celle-là & au centre, la perpendiculaire *BD*. Les quatre points *A*, *B*, *C*, *D* ſont en égales diſtances *; ayant donc mené des lignes droites par ces quatre points, on aura un quarré dans le cercle *X*. Car 1°. cette figure a quatre côtez égaux. 2°. Tous les angles de *ABCD* ſont droits †, car chacun d'eux eſt appuyé ſur la demie circonference.



PROBLEME III.

Faire un cercle dans un quarré. Eucl. IV. Prop. 8. 125

Le quarré *FGHI* eſt donné pour y inſcrire un cercle. Ayant coupé par la moitié les quatre côtez de ce quarré, & mené *AC* & *BD*, ſi du point *E* où ils ſe coupent, & de l'intervalle *AE*, on décrit un cercle, il ſe trouvera inſcrit dans



* *L. 1. n. 42.* † *ſup. n. 44.*

ce quarré : car les quatre lignes *AE*, *BE*, *CE*, *DE* ſont égales ; ainſi le cercle paſſera par les points *A*, *B*, *C*, *D*.

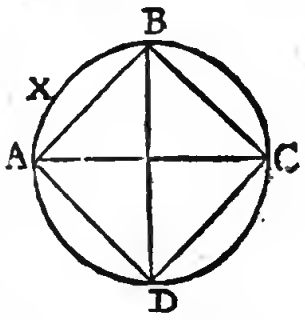
PROBLEME IV.

126 *Circonſcrire un quarré à un cercle.* Eucl. IV. Prop. 7.

Le cercle *ABCB*, *fig. preced.* eſt donné pour lui circonſcrire un quarré. Il faut mener deux diametres qui ſe coupent à angles droits ; enſuite par les quatre extrémitez de ces deux diametres, ayant mené quatre lignes tangentes au cercle *, elles feront le quarré que l'on cherche, comme il eſt évident.

PROBLEME V.

127 *Faire un cercle autour d'un quarré.* Euclid. IV. Prop. 9.



Le quarré *ABCD* eſt donné pour lui circonſcrire un cercle. Ayant tiré des Diagonales, c'eſt-à-dire, des lignes droites d'un angle à un autre angle oppoſé, & prenant pour rayon la moitié d'une des Diagonales, le cercle qu'on décrira ſera celui que l'on cherche.

SECTION V.

De la meſure de l'Aire des Surfaces.

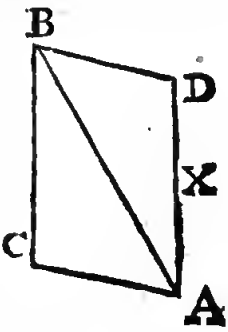
THEOREME I.

128 *EN tout Parallelogramme, les côtez & les angles oppoſez ſont égaux entre eux, & la Diagonale le coupe en deux également.* Eucl. I. Prop. 34.

Soit

* *L.* 1. *n.* 112.

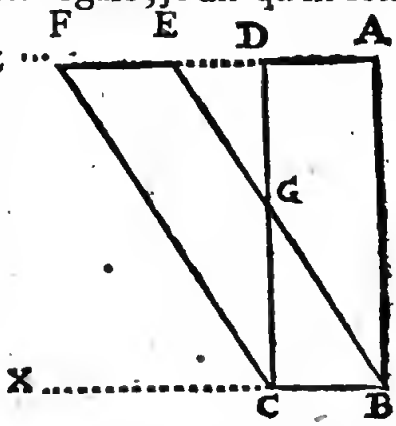
Soit *X* un parallelogramme dont *AB* eſt la diagonale; il faut prouver que l'angle *ADB* eſt égal à *ACB*, & que les côtez *AC* & *BD* ſont égaux. Les deux angles *ABD* & *BAC* oppoſez alternativement ſont égaux *: par le même raiſonnement *BAD* = *ABC*; le côté *AB* eſt commun; ainſi ces deux triangles *ABD*, *BAC* ſont entierement égaux †: Donc l'angle *D* égal à l'angle *C*, & l'angle *A* à l'angle *B*, puiſqu'ils ſont compoſez d'angles égaux, & *AD* = *CB*, comme auſſi *AC* = *BD*, & *AB* coupe en deux également le parallelogramme *ABCD*.



THEOREME II.

Les Parallelogrammes qui ſont entre mêmes paralleles & ſur même baſe, ou une autre égale, ſont égaux. Eucl. I. Prop. 35. & 36. 125

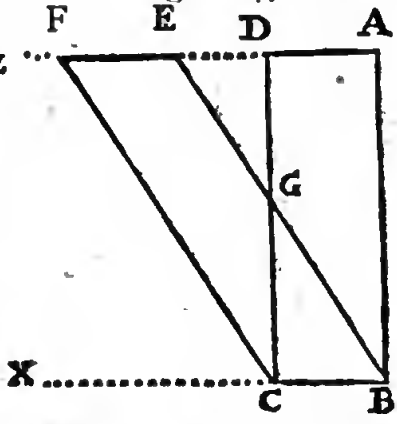
Si les Parallelogrammes *ABCD*, *EFCB* ſont entre mêmes paralleles *Z* & *X*, & ſur une même baſe, *BC*, ou une autre égale; je dis qu'ils ſont égaux.



Si la baſe du Parallelogramme *BCEF* n'eſt pas la même de *ABCD*, ſur *BC* ſoit fait ‡ le Parallelogramme *EFCB* ſemblable & égal au donné *EFCD*. Il faut prouver que ce dernier Parallelogramme *EFCB* eſt égal au Parallelogramme *ABCD*.

* *Sup. n.* 25. † *Sup. n.* 96. ‡ *Sup. n.* 120.

Les côtez *AB*, *CD* du Parallelogramme ſont paralleles par la ſuppoſition, ils ſont auſſi égaux *. Il en eſt de même des côtez *EB*, *FC*. Mais ſi à *AD* & *EF* ſuppoſées égales on ajoute *ED*, les toutes *AE*, *DF* ſeront égales; ainſi les deux triangles *EAB*, *FDC* ayant leurs trois côtez égaux, ſeront entierement égaux †; & ôtant de ces deux triangles égaux la partie *DGE* qui leur eſt commune, les trapezes *ABGD* & *CGEF* ſeront égaux. Ajoutant donc à l'un & à l'autre la même grandeur *BGC*, ce qui fait les Parallelogrammes *ABCD* & *BCEF*, ces deux figures ſeront égales; ce qu'il falloit prouver.



Il faut remarquer que ſi le point *E* ſe trouvoit entre *D* & *A*, au lieu d'ajouter *DE* on l'auroit retranché pour conclure l'égalité des lignes *AE*, *DF*, & enſuite celle des deux triangles *EAB*, *FDC*, & conſéquemment celle des deux Parallelogrammes, au moyen du trapeze commun qu'on auroit ajouté.

Corollaire I.

130 *Donc en meſurant la ſurface d'un parallelogramme, il ne faut avoir égard qu'à la baſe, & à la perpendiculaire qui meſure ſa hauteur.*

Car *fig. preced.* le parallelogramme *BCEF* eſt égal à un parallelogramme rectangle dont *BC* eſt la baſe, & dont les côtez qui ſont perpendiculaires ſont égaux à ſa hauteur. Ainſi c'eſt le parallelogramme rectangle, comme *ABCD*, qui eſt

* *ſup. n.* 128. † *ſup. n.* 92.

eſt la meſure de tous les parallelogrammes dont les baſes ſeront égales à *BC*, & qui auront même hauteur, ou ſeront entre les mêmes paralleles *X* & *Z*. Il ne peut y avoir qu'un parallelogramme rectangle ſur la baſe *BC* entre *X* & *Z*; & il peut y avoir une infinité de parallelogrammes non rectangles ſur la même baſe, & entre ces mêmes paralleles *X* & *Z*.

COROLLAIRE II.

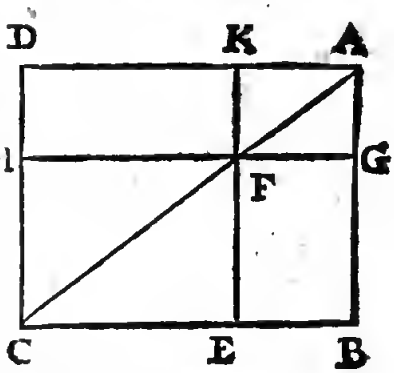
Donc en meſurant l'étendue d'un parallelogramme non rectangle, il ne faut point avoir égard à ſon circuit. 131

Car quand les côtez *BE* & *CF* ſeroient d'un million de lieues ou infinis; ce qui ſe peut concevoir en ſuppoſant que les lignes *X* & *Z* ſoient prolongées à l'infini: ce parallelogramme dont le circuit eſt infini, ne ſera pas plus grand que *ABCD* dont le circuit eſt fini.

THEOREME III.

Si par un point quelconque de la diagonale d'un parallelogramme on tire deux lignes paralleles aux côtez, elles diviſeront le parallelogramme en quatre pieces, dont les deux que la diagonale ne traverſe pas, & qu'on appelle Complémens, ſont égaux entre eux. Euclid. I. Prop. 43. 132

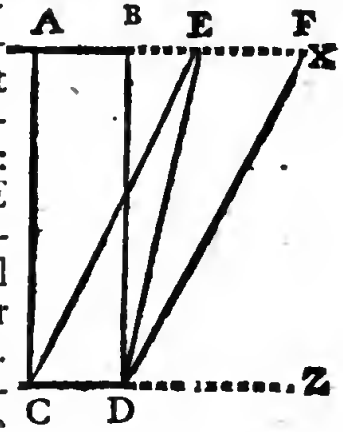
ABC=*ADC*, & *AGF* = *AKF*, & *FEC* = *FHC* *. Des deux triangles égaux *ADC*, & *ABC*, ôtant des grandeurs égales *AKF* & *FHC*, d'une part; & *AGF* & *FEC* de l'autre; les reſtes *FKDH* & *BEFG* ſeront égaux; ce qu'il falloit démontrer.



* *Sup. n.* 128.

THEOREME IV.

133 *Les parallelogrammes ſont doubles des triangles de même hauteur & de même baſe.* Eucl. I. Prop. 41.



Le triangle *ECD* a même baſe que le parallelogramme *ABCD*, & ils ont même hauteur étant entre les paralleles *X* & *Z*: je mene *DF* parallele à *CE* pour faire le parallelogramme *DCEF*, lequel eſt égal à *ABCD* *. Or *CED* eſt égal à *EDF* †. Donc *DCEF* ou la grandeur égale *ABCD*, eſt le double de *CED*.

COROLLAIRE I.

134 *Donc les triangles de même baſe ou de baſe égale & de même hauteur, ſont égaux.* Eucl. I. Prop. 37. & 38.

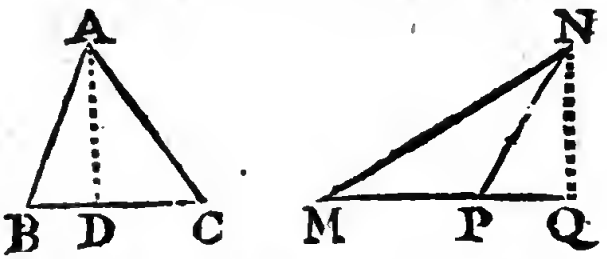
Puiſqu'ils ſont tous la moitié d'un parallelogramme de même baſe & de même hauteur.

COROLLAIRE II.

135 *Donc pour meſurer la ſurface d'un triangle, il ne faut avoir égard qu'à ſa hauteur & à ſa baſe.*

Puiſqu'il eſt égal à la moitié d'un parallelogramme, qui a même baſe & même hauteur.

AVERTISSEMENT.



Pour meſurer le triangle ABC, *il faut donc abaiſ-*

* *ſup. n.* 129. † *ſup. n.* 128.

abaiſſer du ſommet la perpendiculaire AD, *qui en eſt la hauteur*, & *multiplier* BC *par la moitié de* AD, *ou* AD *par la moitié de* BC; *ou* BC *par* AD, & *en prendre la moitié; ce qui revient au même.*

Si le triangle étoit obtuſangle, comme MNP, *alors pour avoir la hauteur, il faudroit prolonger le côté* MP, & *du ſommet* N *tirer la perpendiculaire* NQ.

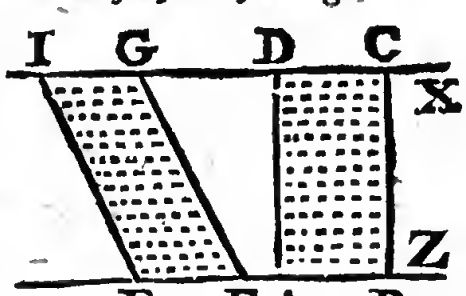
THEOREME V.

Les triangles égaux de même baſe, ou de baſe égale, & poſez d'une même part, ſont entre les mêmes paralleles. Eucl. I. Prop. 39. & 40. 136

S'ils ſont égaux, ils ont même hauteur*; & par conſéquent les perpendiculaires abaiſſées de leur ſommet ſur leurs baſes ſeront égales. Si on mene donc une ligne par leur ſommet, elle ſera parallele à leur baſe †.

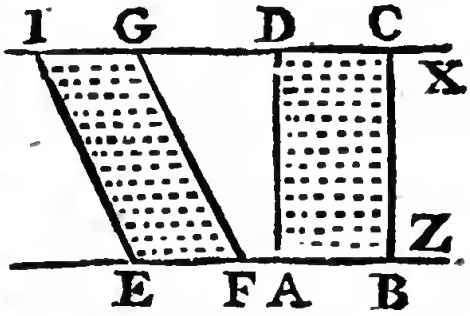
AVERTISSEMENT.

Ces Propoſitions ſe peuvent démontrer par une autre méthode, dont il eſt bon ici de donner quelque connoiſſance. Il eſt évident 1°. *que lorſque deux ſurfaces planes ſont faites par le mouvement de deux lignes droites & égales, ſi le mouvement de l'une & de l'autre ligne eſt égal, & qu'il dure autant de tems, ces deux ſurfaces ſont égales. Si par exemple* AB *eſt égale à* EF, & *que ces deux lignes ſe meuvent parallelement a elles-mêmes d'un mouvement égal, venant dans un même tems de* Z *à* X *deux lignes paralleles*, ABCD & EFGI, *les deux parallelogrammes que décrivent* AB & EF, *ſont égaux.*



* *ſup. n.* 134. † *L.* 1. *n.* 64.

égaux. Si EF *ſe meut bien toujours parallelement à elle-même, mais qu'en même tems elle ait un autre mouvement qui la porte ou à droit ou à gauche, on voit bien que ſes extrémitez* E *&* F *décrivent de plus grandes lignes que* A *&* B *extrémitez de* AB *qu'on ſuppoſe n'avoir qu'un mouvement qui la porte par le plus court chemin de* Z *à* X; *ainſi quoique* ABCD *&* EFGI *ſoient des ſurfaces egales, le circuit de celle-ci eſt plus grand.*

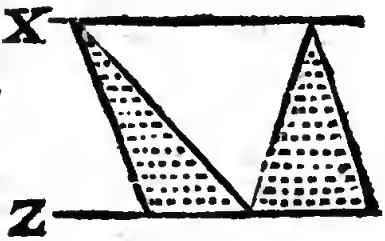


Si ces lignes AB *&* EF *en ſe mouvant laiſſoient à chaque inſtant une trace, il eſt évident que comme on ſuppoſe qu'elles ſont portées dans un même tems de* Z *à* X, *les deux ſurfaces* ABCD *&* EFGH *qu'elles décrivent, ſeroient couvertes d'un nombre égal de lignes toutes égales: & par conſéquent que ces deux ſurfaces doivent être égales. Ce qu'on peut démontrer encore plus ſenſiblement: Au lieu que* AB *&* EF *ſont des lignes mathématiques ſans largeur, ſuppoſons que ce ſoient des lignes qui ont quelque largeur, mais ſi petite qu'elle ſoit abſolument indiviſible, & qu'on les ait rangé parallelement les unes à côté de* AB, *les autres à côté de* EF, *entre* Z *&* X *lignes paralleles. Puiſque l'eſpace entre* Z *&* X *eſt partout le même, & que ces indiviſibles ſont toutes égales, il y en aura autant ſur* AB *que ſur* EF, *elles ſeront par conſéquent deux ſurfaces égales. Si celles qui ſont ſur* EF *ſont bien toujours paralleles entre elles, mais que l'extrémité de la ſeconde paſſe au-delà de* E, *& celle de la troiſieme encore au-delà; alors le circuit de* EFGI *ſera plus grand que celui*

lui de ABCD; *& ſi nous ſuppoſions dans ces lignes une largeur indiviſible, c'eſt-à-dire inſenſible, les cotez* E I *&* F G *ne ſeroient pas des lignes; mais des lignes comme dentelées.*

Cette méthode que nous expliquons ici s'appelle la méthode des indiviſibles; parce qu'on ſuppoſe des lignes qui ont une largeur indiviſible à cauſe de ſa petiteſſe.

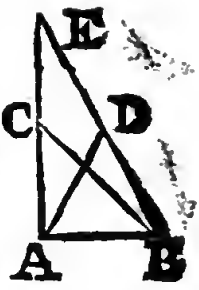
On peut employer cette même méthode pour prouver l'égalité des triangles qui ſont ſur une même baſe, & qui ont la même hauteur ou qui ſont entre deux paralleles; car ſi on ſuppoſe que deux lignes égales ont le même mouvement, & qu'elles ſe diminuent proportionnellement, il faut que dans le même tem elles faſſent des ſurfaces égales. Si auſſi on conçoit deux ſurfaces ſur deux baſes égales, compoſées d'un égal nombre de lignes indiviſibles, qui ſont diminuées proportionnellement, de ſorte que toutes ſoient égales chacune à chacune; il faut que ces deux ſurfaces qui ſont deux triangles, ſoient égales.



Remarquez que de deux triangles d'une ſurface égale, celui dont les côtez & les angles ſont plus égaux entre eux, a moins de circuit. Le triangle même rectangle aura plus de circuit qu'un équilateral qui lui ſoit égal: car ſoit ABC *un rectangle, &* ABD *un équilateral de même hauteur; ils ſont égaux* *. *Soit* AC *prolongé en* E, *de ſorte que* AC = CE. *Le circuit de* ACB *eſt* AB + BC + CE. *Soit prolongé* BD *juſqu'à* E, *chaque angle de* ABD *eſt de* 60, & 137

EAB

* *ſup. n.* 134.

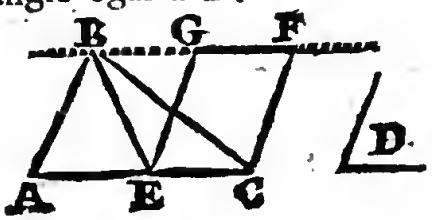


EAB *étant de* 90, *les angles* AEB & EAD *ſont chacun de* 30. *Ainſi* EDA *eſt un iſoſcele*, & DE=AD. *Donc* AB + BE *eſt le circuit de* ABD. *Or* BE *eſt plus petit que* BC+CE; *donc le circuit de* ABD *eſt plus petit que le circuit de* ABC. *Nous ferons voir dans la ſuite, qu'une figure qui eſt plus uniforme en toutes ſes parties, renferme une plus grande ſurface dans un moindre circuit.*

PROBLEME I.

138 *Faire un parallelogramme égal à un triangle donné, & qui ait un angle donné.* Euclid. I. Prop. 42.

Le triangle donné eſt *ABC*, & l'angle donné *D*. Il faut faire un parallelogramme égal au triangle, qui ait l'angle égal à *D*.



1°. Par *B*, ſommet du triangle *ABC*, je mene *BF* parallele à ſa baſe *AC* *. 2°. Sur *E*, moitié de cette baſe, j'éleve *GE* qui faſſe avec *AC* un angle égal à *D* †. 3°. J'acheve le parallelogramme *CEGF* ‡, qui ſera celui qu'on demande; car il eſt égal au triangle *ABC* ‡, & il a l'angle *GEC* égal à l'angle donné *D*.

PROBLEME II.

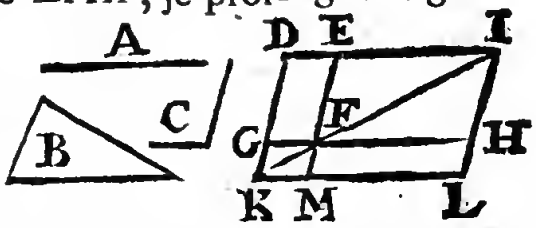
139 *Sur une ligne droite donnée, décrire un parallelogramme égal à un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné.* Eucl. I. Prop. 44.

La ligne donnée eſt *A*, l'angle donné eſt *C*. Il faut faire un parallelogramme égal au triangle *B*.

1°. Par le Problême précédent, je fais, ſelon l'an-

* *L.* 1. *n.* 72. † *ſup. n.* 29. ‡ *L.* 1. *n.* 72. ‡ *ſup. n.* 133.

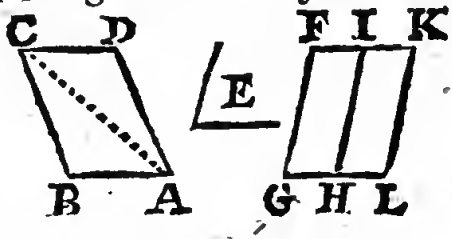
l'angle *C*, le parallelogramme *DEFG* égal au triangle *B*. 2°. Je prolonge *GF* & *DE*: de sorte que *FH*=*A*, & *EI*=*FH*; j'acheve le parallelogramme *EFHI*, je prolonge la ligne *IF* juſqu'à ce qu'elle trouve le prolongement de *DG*; & j'acheve le parallelogramme *DKLI*, dans lequel *FHLM* eſt égal à *DEFG* *. Ainſi *FHLM* eſt le parallelogramme que l'on cherchoit égal au triangle *B* à qui *DEFG* a été fait égal, ayant un angle égal à l'angle donné *C*, & étant fait ſur *FH* égale à la ligne donnée *A*.



Probleme III.

Décrire un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné. Eucl. I. Prop. 45. 140

La figure rectiligne donnée eſt *ABCD*, l'angle donné *E*. 1°. Je réſous la figure *ABCD* en deux triangles, par la ligne *AC*. 2°. Je fais le parallelogramme *GI* égal au triangle *ABC*, ayant l'angle *G* égal à l'angle donné *E* †. 3°. Sur *HI* je fais auſſi le parallelogramme *IL* égal au triangle *ACD*, ayant l'angle *IHL* égal audit angle *E* ‡. Cela étant fait, *GK*=*GI*+*IL*: donc *GK* = *ABCD* eſt le parallelogramme requis



Que ſi la figure avoit été compoſée de plus de deux triangles, on auroit fait la même choſe ſur la ligne KL.

* *ſup. n.* 132. † *ſup. n.* 138. ‡ *ſup. n.* 139.

KL *pour le troiſieme triangle, qu'il a été fait ſur* HI *pour le ſecond; & ainſi des autres.*

DEFINITION.

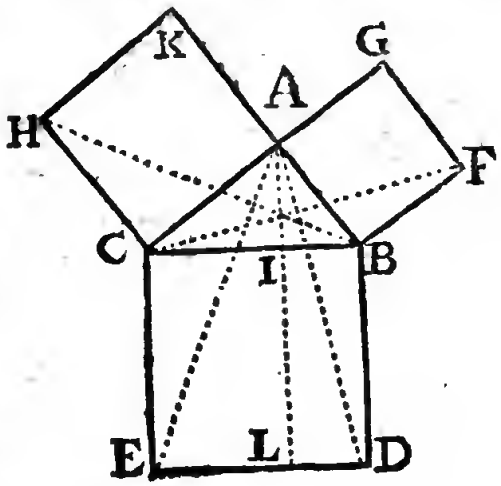
141 *Dans un triangle rectangle, le côté oppoſé à l'angle droit ſe nomme Hypothenuſe.*

THEOREME VI.

142 *Dans tout triangle rectangle le quarré de l'hypothenuſe, ou du côté qui ſoutient l'angle droit, eſt égal aux deux quarrez des deux autres côtez.* Eucl. I. Prop. 47.

Soit le triangle rectangle *CAB*. Si ſur l'hypothenuſe *CB* on fait le quarré *CD*. (*on déſigne ainſi un quarré ou parallelogramme par deux lettres en diagonale*) & ſur les deux autres côtez *CA* & *AB*, on fait les quarrez *CK*, *BG*: Je dis que $CD = CK + BG$.

Soit mené du ſommet *A*, la ligne *AL* perpendiculaire ſur l'hypothenuſe *BC*, elle diviſera le quarré *CD* en deux parallelogrammes *IE* & *ID*, dont le premier eſt égal au quarré *CK*, & le ſecond au quarré *BG*; ce que l'on démontre ainſi.



Soit mené du point *A* au point *E* la ligne *AE*, & du point *B* au point *H* la ligne *BH*. Ces deux lignes formeront les deux triangles égaux *ACE*, *BCH**. Car le côté $CE = CB$, & $CA = HC$; & les angles *ACE* & *HCB* renfermez par

* *Sup.* n. 98.

par ces côtez ſont égaux, ayant chacun un angle droit, & l'angle *ACB* commun. Mais le triangle *ACE* eſt moitié du parallelogramme *IE**, parce que ces deux figures ont même baſe & qu'elles ſont entre les mêmes paralleles. De même le triangle *HCB* eſt moitié du quarré *CK*, par la même raiſon. Or ces triangles ſont égaux; donc les parallelogrammes qui en ſont doubles, ſeront auſſi égaux.

Ce que l'on vient de dire du parallelogramme *IE*, & du quarré *CK*, ſe doit entendre du parallelogramme *ID*, & du quarré *BG*: donc, &c.

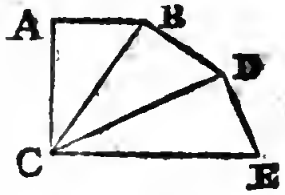
REMARQUE.

Cette Propoſition eſt d'un uſage très fréquent & très étendu dans la Géometrie, auſſi bien que dans la Réſolution des Problêmes par l'Analyſe.

PROBLEME IV.

Trouver un quarré égal à deux ou à pluſieurs autres quarrez. 143

Il ne faut que joindre les deux baſes, *AB*, *AC*, des deux quarrez propoſez, de ſorte qu'ils faſſent un angle droit; la baſe *CB* de cet angle ſera le côté d'un quarré égal à ces deux quarrez, ſelon le précédent Théorême. Si l'on demande un quarré égal à trois quarrez donnez, & que *BD* ſoit le côté du troiſieme, je joins *BC* & *BD*, de ſorte que ces deux lignes faſſent un angle droit. Alors le quarré de *CD* eſt égal aux quarrez de *BC* & de *BD*, par conſéquent aux quarrez de *AC*. de *AB*, de *BD*; & par cette méthode l'on trouvera un quarré qui ſoit égal à tant de quarrez que l'on voudra.



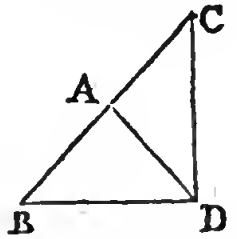
* *ſup. n.* 133.

THEO-

THEOREME VII.

144 *Si le quarré d'un des côtez d'un triangle eſt égal aux quarrez des deux autres côtez, l'angle compris entre ces deux côtez eſt droit.* Eucl. I. Prop. 48.

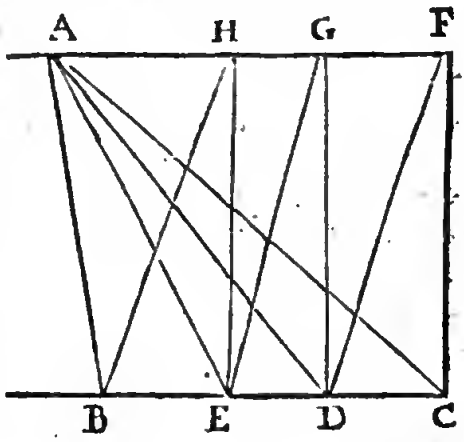
Je ſuppoſe qu'au triangle *ABD* le quarré du côté *BD* ſoit égal aux quarrez des deux autres côtez *AB*, *AD*. Cela étant, je dis que l'angle *BAD* compris entre les deux côtez *AB*, *AD*, eſt droit.



Soit fait *AC* perpendiculaire ſur *AD* & égale à *AB*; donc les quarrez de *AD* & *AC* ſont égaux à celui de *DC* *. Or ces deux quarrez ſont égaux par hypotheſe à celui de *BD*; donc les quarrez de *BD* & de *DC* ſont égaux: Ainſi *CD* & *BD* ſont égaux; donc les deux triangles *ABD* & *ADC* ſont entierement égaux, & par conſéquent équiangles †. *BAD* eſt donc droit, auſſi bien que *CAD*. On ſuppoſe ici, ce qui eſt évident, que les quarrez égaux ont des côtez égaux.

THEOREME VIII.

145 *Un triangle eſt égal à deux ou pluſieurs triangles de même hauteur, dont les baſes priſes enſemble ſont égales à la ſienne.*



Le triangle *ABC* eſt égal aux triangles *ABE*, *EAD* & *DAC*,

* *ſup.* n. 142. † *ſup.* n. 92.

DAC, qui ſont ſes parties. Or $ACD = CFD$, & $DAE = DGE$, & $EAB = EHB$ *; donc *CAB* eſt égal à deux ou pluſieurs triangles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

DEFINITION.

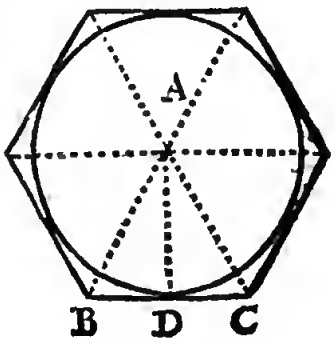
On appelle Apothême *la partie du rayon perpendiculaire, qui eſt entre le côté d'un polygone* 146
inſcrit, & le centre du cercle.

AD eſt un apothême. (*figure ſuivante.*)

THEOREME IX.

La ſurface d'un polygone régulier eſt égale à un 147
triangle qui a pour baſe le circuit de ce polygone, & pour hauteur l'apothême de ce polygone.

Ayant mené des lignes du centre *A* à chaque angle, on le réduit en autant de triangles qu'il a de côtez, tous égaux au triangle *ABC* qui a *BC* pour baſe, & pour hauteur l'apothême *AD*; or un triangle qui a *AD* pour hauteur, & pour baſe le circuit de ce polygone, eſt égal à tous ces triangles dont la hauteur eſt *DA*; & les baſes priſes enſemble, font le circuit de ce polygone †: qui eſt ce qu'il falloit prouver.



Propoſitions évidentes touchant les Polygones.

PROPOSITION I.

Un polygone eſt plus grand que le cercle auquel 148
il eſt circonſcrit.

PRO-

* *ſup. n.* 134. † *ſup. n.* 143.

PROPOSITION II.

149 *Un polygone eſt plus petit que le cercle dans lequel il eſt inſcrit.*

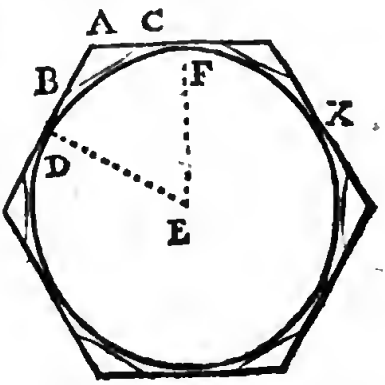
PROPOSITION III.

150 *Un cercle peut être pris pour un polygone d'une infinité de côtez.*

Car ſi un polygone dont le diametre eſt petit avoit un million de côtez, il eſt évident qu'il ne differeroit pas ſenſiblement d'un cercle. Si, dis-je, on conçoit dans un cercle autant de côtez qu'il a de points ſenſibles, ce ſera un polygone & un cercle en même tems.

THEOREME X.

151 *De deux polygones réguliers circonſcrits à un cercle, celui qui a plus de côtez, a un plus petit circuit & une plus petite ſurface.*



X eſt un polygone circonſcrit à un cercle: je diviſe ſes côtez pour faire un autre polygone qui ait plus de côtez, en menant des tangentes qui ſeront hors du cercle *; ainſi ce polygone ſera plus grand que ce cercle †. Je conſidere la même partie de ces deux polygones, c'eſt-à-dire, qui ſoit circonſcrite à la même partie du cercle, par exemple à *EFD*; puiſque $BA + AC$ eſt plus grand que *BC*; donc $BD + BA + AC + CF$ eſt plus grand que $DB + BC + CF$; ainſi le circuit de celui qui a moins de côtez eſt plus grand. La figure *EFCABD* excede *EFCBD* de la grandeur du triangle *ABC*; la ſurface de celui qui a plus de côtez eſt donc plus petite.

Co-

* *L.* 1. *n.* 106. † *ſup. n.* 146.

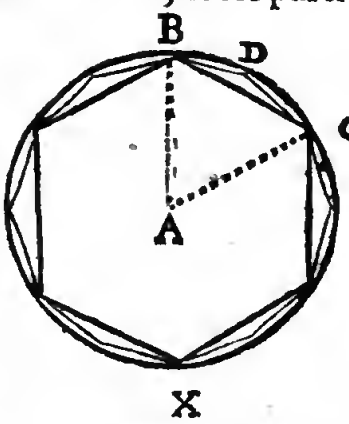
COROLLAIRE.

Donc puiſque plus un polygone circonſcrit a de côtez, plus il eſt petit, demeurant toujours plus grand que le cercle auquel il eſt circonſcrit; il s'enſuit que plus un polygone a de côtez, ſon circuit & ſa ſurface approchent plus du circuit & de la ſurface du cercle auquel il eſt circonſcrit; & qu'ainſi un polygone circonſcrit d'une infinité de côtez ne differe point du cercle. 152

THEOREME XI.

De deux polygones réguliers inſcrits dans un même cercle, celui qui a plus de côtez a un plus grand circuit & une plus grande ſurface. 153

Deux polygones étant inſcrits dans le cercle *X*; je conſidere la partie *ABDC*, & les parties de ces deux polygones qui y répondent.



1°. $BD + DC$ eſt plus grand que BC; partant le circuit de celui qui a plus de côtez eſt déja plus grand.

2°. La figure *ABCD* ſurpaſſe *ABC* de la grandeur du triangle *BDC*; ainſi le polygone qui a plus de côtez a une plus grande ſurface: ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE

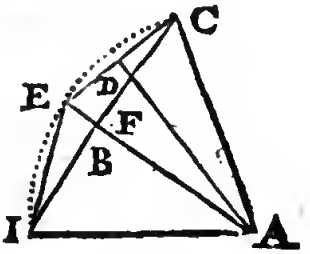
*Donc puiſque de deux ou pluſieurs polygones inſcrits dans un même cercle, celui-là eſt plus grand qui a plus de côtez, demeurant toujours plus petit que le cercle *; il s'enſuit que plus un polygone inſcrit a de côtez, plus il approche de la circonference & de la ſurface du cercle; & qu'ainſi un* 154

* *ſup.* n. 147.

un polygone inſcrit, qui a une infinité de côtez, ne differe point du cercle.

THEOREME XII.

155 *De deux polygones réguliers inſcrits dans un même cercle, ou cercles égaux, celui qui a plus de côtez a un plus grand apothême.*



EC eſt la corde du polygone qui a plus de côtez, *CI* celle de celui qui en a moins; ainſi *CE* étant la corde d'un plus petit arc, eſt plus petite, & par conſéquent plus éloignée du centre *A* que *CI* *. Donc la perpendiculaire *AD* qui eſt l'apothême du polygone dont *CE* eſt la corde, eſt plus grande que *AB* apothême du polygone dont *CI* eſt la corde; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XIII.

156 *La ſurface d'un cercle eſt égale à un triangle qui a pour ſa hauteur le rayon du cercle, & pour baſe la circonference.*

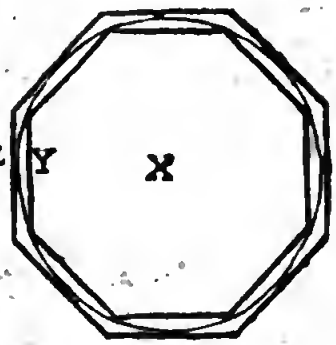
On peut ſuppoſer ſelon les deux Théorêmes précédens & leurs Corollaires, qu'un cercle eſt égal à un polygone d'une infinité de côtez, qui lui eſt circonſcrit ou inſcrit. La ſurface de ce polygone eſt égale à un triangle qui a pour baſe ſon circuit, qui eſt ici la même choſe que la circonference du cercle, & pour hauteur l'apothême ou la perpendiculaire menée du centre de ce polygone ſur un des côtez de ce même polygone, qui ayant un nombre infini de côtez, cette perpendiculaire n'eſt point differente du rayon du cercle où il eſt inſcrit. Prenant donc le cercle pour un polygone ſemblable, ſa ſurface eſt égale à un triangle, dont

* *L. 1. n. 96.*

dont la baſe eſt égale à ſa circonference, & la hauteur eſt égale à ſon rayon.

Le rayon d'un cercle ſe peut meſurer facilement, il n'en eſt pas de même de ſa circonference qu'on ne connoit pas encore. C'eſt ce qui empêche de trouver la quadrature du cercle, c'eſt-à-dire, de faire un quarré égal à la ſurface renfermée dans un cercle: car ſi on connoiſſoit cette circonference, on formeroit facilement un triangle égal au cercle, faiſant ſa baſe égale à cette circonference, & ſa perpendiculaire égale au rayon. Ce triangle, ſuivant ce qui ſera enſeigné dans la ſuite, ſe changeroit facilement en un quarré qui lui ſeroit égal, & par conſéquent audit cercle. Mais on ne peut exprimer la grandeur de la circonference d'un cercle qu'en aſſignant deux lignes, l'une plus grande & l'autre plus petite que cette circonference, qui ne different entre elles que d'une grandeur moindre que toute grandeur qu'on puiſſe marquer; ce que l'on démontre de cette maniere.

Soit le cercle donné X; *je ſuppoſe qu'un polygone, que je nomme* Z, *lui ſoit circonſcrit, & qu'un autre que j'appelle* Y *lui ſoit inſcrit. La grandeur donnée, qui eſt la difference de la ſurface du cercle à une autre ſurface, eſt* T.



J'augmente ou diminue les côtez des polygones Z & Y, *juſqu'à ce que leur difference ſoit plus petite que la grandeur* T; *ce qui eſt facile: car en augmentant les côtez de l'un & l'autre, on augmente la*

grandeur de Y **, & on diminue celle de* Z *†. Ainſi l'un & l'autre approchent plus de la circonference du cercle. La difference de* Z *avec* Y *eſt plus grande que celle de* Z *avec le cercle* X, *puiſque* X *eſt plus grand que* Y ; *donc la difference des ſurfaces de* Z *& de* Y *étant plus petite que la grandeur* T, *on trouve une ſurface qui differe de celle du cercle d'une grandeur plus petite que celle qu'on avoit propoſée : c'eſt-à dire, que ſi on propoſoit de trouver une ſurface qui ne differât de celle d'un cercle donné que de la centmillieme partie d'une ligne, on en pourroit trouver une qui differeroit encore moins.*

* *ſup.* n. 152. † *ſup.* n. 149. & 150.

ELE-

ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TROISIEME.

Les proprietez qui conviennent à toute Grandeur, appliquées aux Lignes, Plans, Solides; & démontrées.

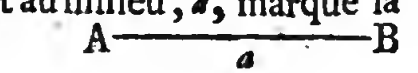
SECTION PREMIERE.

Les quatre Operations de l'Arithmetique, Addition, Souſtraction, Multiplication, & Diviſion, ſur les Lignes, ſur les Plans, & ſur les Solides.

OPERATION I.

LA premiere & la plus ſimple proprieté de toute grandeur, & par conſéquent d'une ligne, d'un plan, d'un ſolide, c'eſt de pouvoir être augmentée, ou diminuée. On peut ajouter une ligne à une ligne, les joignant, ou les prolongeant. On peut de même ajouter un plan à un plan, en les continuant ou les mettant côte à côte l'un de l'autre. Quand on exprime des grandeurs, ſoit 1

lignes, ſoit plans, ſoit ſolides avec des lettres, le ſigne de l'Addition eſt celui-ci +; ainſi $a+b$ veut dire que les grandeurs qu'on appelle a & b, nombres ou lignes, ſont ajoutées enſemble. Lorſque la même lettre ſe trouve repetée pluſieurs fois, on ne la marque qu'une ſeule fois, mais on met devant un chiffre, qui ſignifie combien de fois elle eſt ajoutée à elle-même, $3b$ ſignifie que b eſt ajouté trois fois à lui-même. Pour ajouter une grandeur qui a le ſigne + à la même qui a le ſigne —, on les efface toutes deux; car plus & moins une même grandeur, ce n'eſt rien. Ainſi dans une Addition, il faut effacer les mêmes grandeurs qui ont des ſignes contraires. Dans la Géometrie l'on marque ordinairement une ligne par deux majuſcules aux deux extrémitez, comme AB, ou par une ſeule petite lettre qu'on met au milieu, a, marque la ligne AB.



Operation II.

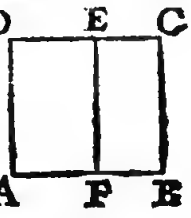
Souſtraction.

Le ſigne de la Souſtraction eſt une petite barre; ainſi $a-b$ marque que l'on conçoit que de a on a retranché b, & que par conſéquent a étoit plus grand que b.

La difference de deux grandeurs, c'eſt l'excès de la plus grande par deſſus la plus petite, ou la plus grande moins la plus petite. Soient deux lignes AB & CD; ayant pris ſur AB la ligne AE égale à CD, leur difference eſt EB excès de AB par deſſus CD, ou la plus grande ligne AB moins la plus petite CD; c'eſt-à-dire, ce qui reſte de la plus grande après le retranchement de la plus petite.

Si

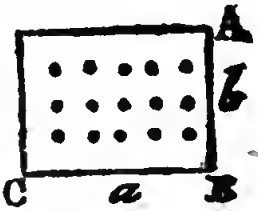
Si l'on retranche du plan *ABCD*, le plan *BCEF*, pour marquer ce retranchement l'on écrit de même *ABCD*—*BCEF*; ce qui ſera la difference de ces deux plans. Après ce retranchement, le reſte eſt le plan *ADEF*. La règle générale de la Souſtraction eſt de changer les ſignes de la grandeur qu'on veut retrancher. On ſous-entend toujours le ſigne + devant la grandeur qui n'a aucun ſigne. Ainſi pour ôter *b* de *a*, c'eſt-à-dire, +*b* de *a*, il faut changer ce + en —, & écrire *a*—*b*.



Operation III.

Multiplication.

Multiplier une grandeur par une autre, c'eſt prendre l'une, (n'importe par laquelle on commence,) autant de fois qu'il y a d'unitez dans l'autre. Multiplier *a* par *b*, c'eſt prendre *a* autant de fois que *b* a d'unitez ou de parties; ce qu'on marque en uniſſant ainſi ces deux lettres, *ab*. Il eſt évident que ce plan eſt fait par le mouvement de la ligne *b*, mue de *B* à *C*; partant repetée ou priſe autant de fois qu'il y a d'unitez ou de parties en *a*. Quand on marque un plan par deux lettres ainſi, *ab*, on ſuppoſe que *a* ou *BC* fait un angle droit avec *b* ou *AB*. Nous avons démontré dans le Livre précédent, que la grandeur d'un plan ne dépend pas ſeulement de la longueur de ſes côtez, mais auſſi de la nature de l'angle qu'ils font; qu'un parallelogramme rectangle eſt plus grand * que celui qui 3

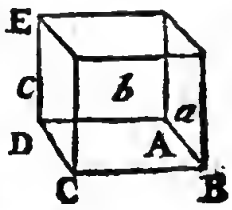


* *L. 2. n. 230.*

ne l'eſt pas. Il a ainſi une meſure déterminée; c'eſt pourquoi on ſuppoſe, comme je le viens de dire, que deux lignes qu'on conçoit multipliées l'une par l'autre, font un rectangle.

Quand on ſe ſert de petites lettres, leur union eſt une marque qu'elles ſont multipliées l'une par l'autre; mais il n'en eſt pas de même quand on ſe ſert de capitales. Ainſi *AB* ne marque pas que *A* eſt multiplié par *B*, mais que *AB* eſt une ligne, dont *A* & *B* ſont les extrémitez. Le ſigne de la multiplication de deux lignes marquées avec des capitales eſt celui-ci ×, qui eſt une petite croix de S. André, $AB \times BC$, marque que *AB* eſt multiplié par *BC*.

Si l'on conçoit que le plan *ABCD* eſt pris autant de fois, & mis ſur ſoi-même, qu'il y a de parties dans *DE*, cela fait un ſolide $ABCD \times DE$. Si $AB = a$, & $AD = b$, & $DE = c$, le produit ſera *abc*. Comme l'on marque un plan avec deux petites lettres, on marque le ſolide avec trois.



Operation IV.

Diviſion.

4 On nomme Dividende la grandeur qu'on propoſe à diviſer; Diviſeur, celle par laquelle on diviſe; Quotient, celle qui exprime combien de fois le Diviſeur eſt dans le Dividende.

Pour marquer qu'une grandeur eſt diviſée par une autre, on met leurs lettres l'une ſous l'autre, & on les ſépare par une petite ligne. Pour diviſer *a* par *b*, on met *a* ſur *b*, de cette maniere $\frac{a}{b}$, qui marque qu'on conçoit que *a*

eſt

eſt diviſé par *b*. La Diviſion eſt une eſpece de Souſtraction. Quand on ôte une grandeur toute entiere d'elle-même, il ne reſte rien; Ainſi diviſer *a* par *a* c'eſt ôter *a* de *a* autant de fois qu'il y eſt contenu. Il y eſt une fois; ainſi en diviſant *a* par *a*, il ne doit rien reſter: le Dividende & le Diviſeur diſparoiſſent; par conſéquent leurs lettres qui ſont également dans le Diviſeur & dans le Dividende doivent être ſupprimées. Pour diviſer *cd* par *c*, il faut ſupprimer *c*, & laiſſer *d*, qui ſera le quotient de *cd* diviſé par *c*, c'eſt-à-dire, que *d* ſera le ſigne du nombre de fois que *c* eſt dans *cd*. La Diviſion défait ce qu'a fait la Multiplication. Quand on multiplie *c* par *c*, on les joint, *cd*. Diviſant donc *cd* par *c*, il faut que *c* ne paroiſſe plus, & qu'il ne reſte que *c*. S'il falloit multiplier $\frac{cd}{a}$ par *a*, il faudroit effacer *a*; c'eſt-à-dire, que le produit de $\frac{cd}{a}$ par *a* eſt *cd*: car $\frac{cd}{a}$ c'eſt *cd* diviſé par *a*, & effaçant *a*, on rétablit *cd*; la diviſion défait, & la multiplication refait.

Remarquez que le quotient d'une diviſion étant multiplié par le Diviſeur, il produit une grandeur égale à celle qui a été diviſée, ce qui eſt évident: car multiplier le quotient par le Diviſeur, c'eſt le prendre autant de fois qu'il eſt contenu dans la grandeur à diviſer.

Les mêmes Operations, Addition, Souſtraction, Multiplication & Diviſion, lorſque les Grandeurs ſont complexes.

On dit qu'une grandeur eſt complexe, lorſqu'elle eſt compoſée de deux ou de pluſieurs gran-

grandeurs, qui ſont exprimées chacune par un ſigne particulier : $a + b$ & $a - b$, ſont des grandeurs complexes. Plus une grandeur, moins la même grandeur, ce n'eſt rien. $+ 3 - 3$ eſt égal à zero ; donc pour rendre une expreſſion nette, on efface celles qui ſe trouvent avec des ſignes contraires. Ayant par exemple cette expreſſion $5b - 2b$, on la réduit à celle-ci, $3b$. Car, comme nous en avons averti, lorſqu'une grandeur n'a point de ſigne exprimé, il faut ſous-entendre le ſigne $+$; ainſi $5b - 2b$, c'eſt comme s'il y avoit $+ 5b - 2b$. Or dans cette expreſſion il y a $2b$ avec des ſignes contraires, je l'efface donc, & j'écris $+ 3b$, ou ſimplement, $3b$.

Addition des Grandeurs complexes.

6 Les grandeurs complexes s'ajoutent comme les ſimples. Pour ajouter $b + c$ avec $f + b$, il faut les joindre par le ſigne $+$ ainſi ; $b + c + f + b$. Il faut toujours effacer les lettres qui ſe trouvent avec des ſignes contraires ; ainſi ajoutant $b + d$ avec $c - d$, on écrit ſeulement $b + c$.

Lorſque les mêmes lettres ſe trouvent repetées pluſieurs fois, on n'en met qu'une avec le chiffre devant, qui fait connoître combien de fois elle eſt priſe ; comme ici pour ajouter $4f + 6g$ avec $3f - 4g$, on écrit : $7f + 2g$. Si l'on avoit marqué cette operation au long, on auroit écrit ; $4f + 6g + 3f - 4g$. Or $4f + 3f = 7f$, & $+ 6g - 4g = + 2g$.

Pour ajouter de part & d'autre du ſigne de l'égalité une même grandeur, là où elle ſe trouve avec le ſigne $-$, il faut l'effacer, & la mettre de l'autre côté avec le ſigne $+$. Soit cette égalité

lité $a = b - d$; pour ajouter d de part & d'autre, j'écris $a + d = b$. L'operation tout au long ſeroit: $a + d = b - d + d$. Mais $-d + a = 0$.

Souſtraction des Grandeurs complexes.

La règle générale de cette operation, eſt la même que pour les grandeurs ſimples: il faut changer les ſignes de la grandeur à retrancher. On doit toujours ſous-entendre le ſigne $+$ devant toute grandeur qui n'a aucun ſigne. Partant pour ôter $b + d$ ou $+ b + d$ de $c + f$, il faut écrire $c + f - b - d$. Car 1°, il faut joindre b avec $c + f$ par $-$, ſigne de la Souſtraction. 2°. Ce n'eſt pas ſeulement $+ b$ qu'on veut retrancher, mais encore $+ d$; il le faut donc écrire ainſi $- d$. Au contraire, pour ôter $b - d$ de $c + f$, il faudroit changer les ſignes de $+ b - d$, mettant $c + f - b + d$. Car quand on ſouſtrait $b - d$ de $+ f$, on ne veut pas ôter entierement la grandeur b; il s'en faut la grandeur d. Ainſi ayant mis $c + f - b$, on retranche de $c + f$ plus qu'il ne faut retrancher, ſavoir la grandeur d; c'eſt pourquoi on l'ajoute à $c + f$ en cette maniere, $c + f - b + d$. 7

Remarquez bien que dans cette expreſſion $c + f - b - d$, ce n'eſt pas de b que d eſt retranché; mais b & d ſont retranchez de $c + f$.

Quand on a à ſouſtraire de part & d'autre du ſigne de l'égalité une même grandeur, il n'y a qu'à l'effacer où elle ſe trouve avec le ſigne $+$, & la mettre de l'autre côté avec le ſigne $-$. Soit $a = b + d$; pour ôter d de part & d'autre, j'écris: $a - d = b$.

Multiplication des Grandeurs complexes.

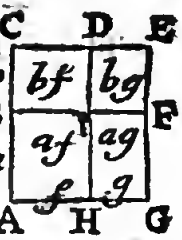
8 Les queſtions ſur la multiplication des Grandeurs complexes, ſe réduiſent à ces trois. 1°. Multiplier une ligne, plus une autre ligne, par une ligne, plus une autre ligne: comme $a + b$ par $f + g$. 2°. Multiplier une ligne moins une autre ligne, par une ligne, plus une autre ligne; comme $a - b$ par $f + g$. 3°. Multiplier une ligne moins une autre ligne, par une ligne moins une autre ligne.

Règles pour ces trois cas.

Regle I.

Lorſque les deux grandeurs données à être multipliées l'une par l'autre, ont chacune le ſigne +, *leur produit doit avoir le même ſigne* +.

Pour multiplier $a + b$ par $f + g$, il faut commencer l'operation par multiplier a par f, écrivant af, ce qui eſt le ſigne du produit de a par f. Faiſant de même autant de multiplications partiales qu'il y a ici de lettres, on aura $af + bf + ag + bg$, pour produit de $a + b$ par $f + g$. Pour rendre la choſe ſenſible, ſoit $a + b = AC$. Soit $a = AB$, & $b = BC$. Soit auſſi $f + g = AG$, & $f = AH$ & $g = HG$. Je ſuppoſe que $ACEG$ eſt un rectangle coupé par des paralleles, qui font les parallelogrammes, $ABIH$, $FGIH$, $BCDI$, $DEFI$, auxquels parallelogrammes eſt égale leur ſomme $AC\ EG$. Le tout eſt égal à ſes parties. Or ces quatre produits $af + bf + ag + bg$ ſont égaux à ces qua-



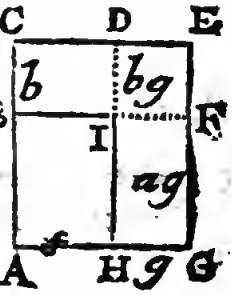
quatre parallelogrammes, comme il eſt évident: ils ſont donc égaux à $AC \times AG$; c'eſt-à-dire, au parallelogramme de AC par AG, ou de $a+b$ par $f+g$.

Regle II.

Plus en moins, ou moins en plus, donne un produit, qui doit avoir le ſigne —.

C'eſt-à-dire, que ſi l'une des deux grandeurs a le ſigne —, & l'autre le ſigne +, leur produit doit avoir le ſigne —. Suivant cette Règle pour multiplier $a+b$ par $f-g$, je multiplie 1°, $a+b$ par f, ce qui fait $af+bf$; mais comme ce n'étoit pas par toute la valeur de f qu'il falloit multiplier $a+b$, qu'il s'en falloit la valeur de g, ce produit $af+bf$ eſt trop grand de la valeur de g, multipliant $a+b$, c'eſt-à-dire, de $ag+bg$. J'ôte donc ce que j'avois mis de trop, & l'expreſſion ſera $af+bf-ag-bg$.

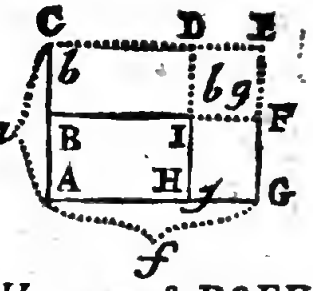
Soit $a = AB$ ou HI. $b = BC$ ou ID. $g = HG$ ou IF, & $f = AG$. Ainſi $a+b = AC$, & $f-g = AH$; donc $af = AB \times AG$; & $bf = BC \times BF$. Il faut démontrer que $af+bf-ag-bg = ACDH$, ou que $ACDH = ACEG - FGHI - DEFI$; ce qui eſt évident.



Regle III.

Moins en moins donnne plus.

Multipliant ces deux grandeurs complexes l'une par l'autre, $a-b$, & $f-g$, leur produit eſt $af-bf-ag+gb$, où vous voyez qu'on marque le produit de $-g$ par $-b$ avec le ſigne +. Il faut prouver que cela eſt bon.



Soit $a = AC$, & $b = BC$. Ainſi $a - b = AB$. Soit auſſi $f = AG$, & $g = HG$; ainſi $f - g = AH$. Pour démontrer ce qui eſt en queſtion, conſiderez que $ABIH$ eſt égal à $ACEG$, ou af, ſi l'on en retranche 1°, $DEGH$, ou ag, & $BCEF$ ou bf, pourvu qu'on lui rajoute $DEFI$, ou bg, qu'on lui ôte de trop; car en ôtant $DEGH$, & $BCEF$, on ôte deux fois $DEFI$, ou bg. Ainſi $af - bf - ag + bg$ eſt le produit de $a - b$ par $f - g$. Moins en moins donne donc plus, c'eſt-à-dire, qu'à la fin du produit le ſigne $+$ ſe doit trouver, parce qu'ayant trop ôté, il faut remettre ce qu'on ôtoit de trop.

Diviſion des Grandeurs complexes.

9 La règle générale de la Diviſion, ſoit des Grandeurs complexes, ſoit des Grandeurs incomplexes, eſt de mettre le dividende au-deſſus d'une ligne, & le diviſeur deſſous. Ainſi pour diviſer $ax + cd$ par $xd + cb$, j'écris $\frac{ax+cd}{xd+cb}$. On a vu que dans les incomplexes il faut effacer les mêmes lettres qui ſe trouvent deſſus & deſſous; il le faut faire auſſi dans les complexes, lorſqu'elles ſe trouvent dans chaque partie du dividende & du diviſeur. Cette expreſſion $\frac{ax+dx}{bx+cx}$ ſe peut donc réduire à celle-ci plus ſimple, $\frac{a+d}{b+c}$, qui eſt d'égale valeur.

Comme la diviſion défait ce que la multiplication a fait, les trois règles qu'on vient de don-

donner de la multiplication font connoitre en voyant les ſignes d'un quotient, quels ſignes peuvent avoir le dividende & le diviſeur, 1°, ſi tous deux ont le ſigne +; 2°, ſi l'un a +, & l'autre −; 3°, ſi tous deux ont le ſigne −.

AVERTISSEMENT.

En voilà aſſez pour entendre la ſuite de ces Elémens de Géometrie; mais pour pratiquer avec plus de facilité cette maniere d'Arithmetique par lettres, ce qui s'appelle Algebre, il faut lire les Elémens des Mathématiques.

SECTION II.

De la Puiſſance des Lignes.

EN multipliant une grandeur, on l'éleve comme par degrez, ſelon qu'on la multiplie. On nomme Puiſſances, ces degrez.

DEFINITION I.

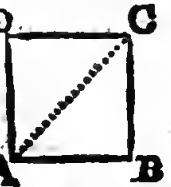
Premiere puiſſance d'une ligne, c'eſt la ligne même ſans être multipliée. 10

DEFINITION II.

Seconde puiſſance, ou quarré d'une ligne, c'eſt ſon produit, étant multipliée par elle-même. 11

La ſeconde puiſſance de b eſt bb, ou b^2. Ce nombre 2, marque les deux dimenſions de bb. Remarquez qu'il y a bien de la difference entre b^2 & $2b$; car cette ſeconde expreſſion, $2b$, marque que b a été ajouté à lui-même; au-lieu que b^2, fait connoitre que c'eſt un quarré, ou que b eſt multiplié par lui-même. Or cela eſt bien different; car par exemple, 3 & 3, ou 3 ajouté à lui-même, ne fait que 6; au-lieu que 3 fois 3, ou 3 multiplié par lui-même, fait 9.

Lorſqu'on marque une ligne avec deux lettres capitales *A* & *B* à ſes extrémitez, ſon produit, ou ſa ſeconde puiſſance, qui eſt le quarré *ABCD*, ſe marque avec ces quatre lettres, ou par deux ſeulement, qui ſont aux extrémitez de la diagonale, comme ſont ici *A* & *C*, écrivant *AC*. Ou on joint la même ligne *AB* avec elle-même par une petite croix de ſaint André, qui eſt le ſigne de la multiplication, ainſi, $AB \times AB$. Ou enfin on tire une ligne ſur *AB*, & on y ajoute le ſigne de la ſeconde puiſſance, de cette maniere, $\overline{AB}^{2}$. Ainſi $\overline{MN}^{2}$ eſt un quarré dont *MN* eſt le côté, ou qui eſt faite de *MN* multiplié par *MN*.



AVERTISSEMENT.

Euclide, & les anciens Géometres prenoient le quarré pour la premiere puiſſance, qui dans le langage des nouveaux Géometres eſt la ſeconde. Une grandeur réelle avant que d'être multipliée par elle-même, ou par une autre, a une valeur, ou une puiſſance.

DEFINITION III.

12 *On appelle racine d'une puiſſance, la ligne de la multiplication de laquelle s'eſt fait cette puiſſance.*

La racine quarrée de *bb* ou de b^2, eſt une ligne égale à *b*, c'eſt-à-dire, au côté d'un quarré égal à *bb*.

AVERTISSEMENT.

Lorſque la racine d'une puiſſance ne ſe peut exprimer par un nombre, ce qui arrive en certaines occaſions, comme on le démontrera, on met devant elle ce ſigne √ avec la marque de la puiſſance; ainſi, √2, ſi c'eſt une racine quarrée; √3, ſi c'eſt une racine cube.

DE-

DEFINITION IV.

Le cube, ou la troiſieme puiſſance d'une ligne, 13
c'eſt le produit qu'elle fait, lorſqu'elle multiplie ſon quarré.

Le quarré de b eſt bb. Si l'on multiplie bb par b, ce qui fait bbb, ce ſolide ou cube eſt la troiſieme puiſſance de la ligne b. Ce cube bbb ſe peut exprimer ainſi, b^3. Ce nombre 3, en marque les trois dimenſions. b^3 eſt different de $3b$; car $3b$, c'eſt b pris par trois fois, & b^3 eſt multiplié une premiere fois par lui-même, ce qui produit ſon quarré bb ou b^2; & en ſecond lieu, ce quarré eſt multiplié par b, ce qui fait bbb, ou b^3. Prenant 3 fois ce nombre de 4, cela fait 12. Mais prenant le quarré de 4, qui eſt 16, & le multipliant par ſa racine, qui eſt 4, cela fait 64.

Lorſqu'une ligne comme AB eſt marquée par deux lettres capitales à ſes extrémitez, on peut exprimer ainſi ſa troiſieme puiſſance ou ſon cube: $AB \times AB \times AB$, ce qui fait connoître qu'on a multiplié 1°, AB par AB, ce qui fait le quarré de AB; 2°, qu'on a multiplié ce quarré de AB par AB, racine de ce quarré. On a abregé cette expreſſion en mettant ſur AB une ligne avec le petit chiffre, qui marque le nombre de ſes dimenſions; $\overline{AB}^3$ eſt le cube de AB.

DEFINITION V.

Toute grandeur faite du produit de deux au- 14
tres, s'appelle Plane.

Ainſi bd eſt une grandeur plane, ou un plan, dont une de ces lettres marque la largeur, & l'autre la longueur, c'eſt-à-dire, ſes deux dimenſions; $AB \times BC$ eſt une grandeur plane, ou un plan.

DE-

DEFINITION VI.

15 *Toute grandeur faite du produit de trois autres, s'appelle Solide.*

Ainſi *bcd* eſt un ſolide, dont ces trois lettres marquent les trois dimenſions. Le produit de deux de ces lettres en marque le plan ou la ſurface, & la troiſieme marque la hauteur, ou l'épaiſſeur par laquelle le plan a été multiplié.

AVERTISSEMENT.

Par quelque ordre que l'on multiplie deux grandeurs, le produit eſt toujours égal. ab & ba *ſont le même plan. Il en eſt de même de trois ou de pluſieurs lignes:* abc, bca, cab, *par quelque ordre qu'on les multiplie, le produit eſt le même. Dans Euclide, ce mot* rectangle *ſignifie un plan dont les angles ſont droits. Nous ſuppoſons que les plans & les ſolides dont nous allons parler, ſont tous rectangles.*

Remarquez auſſi, que comme il eſt d'un très grand avantage d'accoutumer promptement ſon eſprit à ces ſortes de calculs, pour la formation des quarrez & des rectangles, on ſupprimera exprès les figures dont Euclide & ſes Interpretes ſe ſervent ordinairement pour les démonſtrations de pluſieurs des premieres Propoſitions ſuivantes; & il eſt à propos de faire actuellement ces calculs la plume en main.

PROPOSITION I.

17 *Si de deux lignes droites, l'une eſt coupée en tant de parties que l'on voudra; les rectangles compris de la non-coupée, & de chacune des parties de la coupée, ſont égaux au rectangle des deux toutes.* Eucl. II. Prop. 1.

Soient *AE* & *AB* deux lignes droites. *AE* eſt coupée en ſes parties *AC*, *CD*, *DE*. La ligne *A* n'eſt point coupée; il faut prouver que le rectangle des toutes *AB* & *AE* eſt égal aux

aux rectangles faits de la toute AB, & de chacune des parties de AE; c'eſt-à-dire, que $AB \times AE = AB \times AC + AB \times CD + AB \times DE$.

Les parties étant égales à leur tout, AE eſt la même choſe que $AC + CD + DE$. Par conſéquent c'eſt la même choſe de multiplier AB par AE ou par $AC + CD + DE$. Donc $AB \times AE = AB \times AC + AB \times CD + AB \times DE$: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

Si une ligne droite eſt coupée comme l'on voudra, les rectangles compris de la toute, & de chacune de ſes parties, ſont égaux au quarré de la toute. Eucl. II. Prop. 2. 18

Soit la ligne AB coupée en deux parties au point C. Soit $AB = a$ & $AC = b$, & $BC = d$. Le tout étant égal à ſes parties $a = b + d$. Donc multiplier a par a, & multiplier a par $b + d$, c'eſt faire la même choſe; & par conſéquent $aa = ab + ad$. C'eſt-à-dire que le quarré de la toute AB ou aa, eſt égal aux rectangles faits de la toute AB, & de ſes parties AC & CB; ce qu'il falloit prouver.

A C B

PROPOSITION III.

Si on diviſe une ligne comme on voudra en deux parties, le rectangle de la toute & de l'une de ſes parties, eſt égal au rectangle des deux parties plus le quarré de la partie premierement priſe. Eucl. II. Prop. 3. *même figure.* 19

Soit la ligne AB diviſée en deux parties, telles qu'on voudra au point C, il faut démontrer que $AB \times AC = AC \times BC + \overline{AC}^2$ *.

Soit

* *Sup. n.* 11.

Soit $AB = a$, & $AC = b$, & $BC = d$. Ainſi comme $AC + CB = AB$, de même $a = b + d$. Multipliant donc a & $b + d$ par le même multiplicateur b, les produits ſeront égaux. $ab = bd + bb$. Or ab, eſt le rectangle de AB par AC, & $bd + bb$ eſt le rectangle fait des parties b & d, plus le quarré de la partie b premierement priſe; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

20 *Si on diviſe une ligne comme on voudra en deux parties, je dis que le quarré de toute la ligne eſt égal au quarré de chaque partie, & à deux fois le rectangle fait d'une partie par l'autre.* Eucl. II. Prop. 4.

Soit la ligne AB diviſée en deux parties au point D. Il faut prouver que $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + 2\,AD \times DB + \overline{DB}^2$.

A D B

Soit $AD = b$, & $DB = d$. Donc $AB = b + d$. Or le quarré de $b + d$, c'eſt $b^2 + 2bd + d^2$*. Mais $\overline{AD}^2 = bb$ & $\overline{DB}^2 = dd$, & $2\,AD \times DB = 2bd$. Donc $\overline{AB}^2 = bb + 2bd + dd$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION V.

21 *Si l'on diviſe une ligne en deux parties égales, & en deux parties inégales, le rectangle fait des parties inégales, plus le quarré de la partie du milieu, ſont égaux au quarré de la moitié de la ligne.* Eucl. II. Prop. 5.

La ligne AB eſt diviſée également en C, & inégalement en D. Je dis que $AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$. Soit

* *Sup. n. 8.*

Soit AC ou $CB = a$ & $CD = b$.

Donc $DB = a - b$ & $AD = a + b$. Or le rectangle de $a + b$ par $a - b$ eſt $aa + ab - ab - bb$ *. Mais $+ ab - ab = 0$; donc ce rectangle eſt $aa - bb$. Par conſéquent $AD \times DB = aa - bb$. Donc ajoutant de part & d'autre bb ou $\overline{CD}^2$ égal à bb, cela fera $AD \times DB + \overline{CD}^2 = aa$; ce qu'il faut prouver.

Pour ajouter bb à $aa - bb$, il ne faut que ſupprimer $- bb$; car il eſt évident que $aa - bb + bb = aa$. Ainſi qu'il a été expliqué †.

Proposition VI.

Si une ligne droite eſt coupée par la moitié, 22 *& qu'on lui ajoute directement une autre ligne droite, le rectangle compris de la toute & de l'ajoutée, comme d'une ſeule ligne & de l'ajoutée, avec le quarré de la moitié de la toute, ſont égaux au quarré de la moitié de la toute & de l'ajoutée comme d'une ſeule ligne.* Eucl. II. Prop. 6.

La ligne AB eſt coupée par la moitié au point C. On lui a ajouté directement la ligne droite BD. Il faut démontrer que $AD \times BD + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$.

Soit AC ou $CB = b$. Donc $AB = 2b$, & $\overline{BC}^2$ ou $\overline{AC}^2 = bb$. Soit $BD = d$. Donc $CD = b + d$, & $2b + d = AD$. Partant $AD \times BD = 2bd + dd$; & $AD \times BD + \overline{BC}^2 = 2bd + dd + bb$. Or le quarré de CD ou de

b

* *ſup.* n. 8. † *ſup.* n. 6.

$b + d$ eſt $bb + 2bd + dd$*; Ainſi $AD \times BD + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$; ce qu'il falloit prouver, ſavoir, que le rectangle de $AD \times BD$, plus le quarré de AC ou BC, étoient égaux au quarré de CD.

PROPOSITION VII.

23 *Si on coupe une ligne comme on voudra, le quarré de la toute & celui de l'une des parties ſont égaux au quarré de l'autre partie & à deux rectangles faits de la toute, & de la partie premierement priſe.* Eucl. II. Prop. 7.

La ligne AB a été coupée, comme on a voulu, au point C. Il faut démontrer que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AB \times BC + \overline{AC}^2$.

Soit $AC = b$. Donc $\overline{AC}^2 = bb$. Soit $BC = d$; donc $\overline{BC}^2 = dd$. De même puiſque $AB = b + d$, donc † $\overline{AB}^2 = bb + 2bd + dd$; & $AB \times BC = bd + dd$. Doublant ces deux grandeurs $2AB \times BC = bd + 2dd$, & leur ajoutant $\overline{AC}^2$ ou bb, viendra $2AB \times BC + \overline{AC}^2 = 2bd + 2dd + bb$, & conſéquemment égal à $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; ce qu'il falloit démontrer.

B C A

PROPOSITION VIII.

24 *Si une ligne droite eſt coupée en deux parties comme l'on voudra, quatre fois le rectangle compris de la toute, & de l'une de ſes parties, avec le*

* *ſup.* n. 8. † *ſup.* n. 8.

le quarré de l'autre partie, ſont égaux au quarré de la toute & de la partie premierement priſe comme d'une ſeule ligne. Euclid. II. Propoſit. 8. *Même figure.*

La ligne AB a été coupée, comme on a voulu, en deux parties au point C. Il faut démontrer que $4\,AB \times BC + \overline{AC}^2$ eſt égal au quarré d'une ligne égale à $AB + BC$.

Soit $AC = b$, & $BC = d$. Donc $AB = b + d$, & $AB + BC = b + d + d$, ou $b + 2d$, dont le quarré eſt $bb + 4bd + 4dd$*, qui ſera égal à celui de la ligne $AB + BC$. Or $AB \times BC = bd + dd$, puiſque AB vient d'être poſé $= b + d$, & $CB = d$: donc $4\,AB \times BC = 4bd + 4dd$, ajoutant d'une part $\overline{AC}^2$,

B C A

& de l'autre ſon égal bb, on aura $\overline{AC}^2 + 4\,AB \times BC = bb + 4bd + 4dd$, qui eſt la même valeur qu'on vient de trouver pour le quarré de la ligne $b + 2d = AB + BC$; ainſi le quarré de $AC + 4\,AB \times BC$ ſont égaux au quarré de la ligne $AB + BC$; ce qu'il falloit prouver.

Proposition IX.

Si une ligne droite eſt coupée en deux parties égales, & en deux inégales; les quarrez des deux parties inégales ſont le double du quarré de la moitié de la toute & du quarré de la partie du milieu. Eucl. II. Prop. 9. 25

La ligne AB eſt coupée en deux parties égales en C, & en deux inégales en D. Il faut

* *ſup.* n. 8.

faut prouver que $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$ eſt double de $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$.

Soit AC ou $CB = b$. Soit $CD = d$. Donc $AD = b + d$, & $DB = b - d$. Ainſi $\overline{AD}^2 = bb + 2bd + dd$*; & $\overline{DB}^2 = bb - 2bd + dd$; & $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = bb + 2bd + 2dd - 2bd$. Et puiſque $+2bd - 2bd$ ne font rien, donc $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2bb + 2dd$; ce qui eſt le double de $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$: ce qu'il falloit prouver.

A C D B

PROPOSITION X.

26 *Si une ligne droite eſt coupée en deux parties égales, & qu'on lui ajoute directement une autre ligne droite, le quarré de la toute & de l'ajoutée comme d'une ſeule ligne, avec le quarré de l'ajoutée, ſont doubles du quarré de la moitié de la toute, & du quarré de ladite moitié & de l'ajoutée, comme d'une ſeule ligne.* Euclid. II. Prop. 10.

La ligne AB eſt coupée par la moitié au point C; & on lui a ajouté la ligne BD. Il faut démontrer que le quarré de $AB + BD$, plus celui de BD ſont le double de celui de BC & de CD; c'eſt-à-dire, que $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ eſt égal à $2\overline{BC}^2 + 2\overline{CD}^2$.

Soit AC ou $BC = b$. Donc $\overline{BC}^2 = bb$, & $AB = 2b$; donc $\overline{AB}^2 =$

A C B D

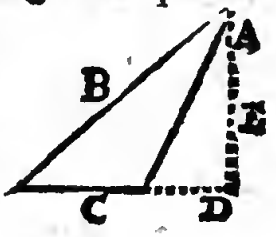
* *ſup.* n. 8.

$= 4bb$. Soit $BD = d$; donc $AD = 2b + d$, & $\overline{AD}^2 = 4bd + 4bd + dd$. Donc le quarré de $AB + BD$, avec le quarré de BD eſt égal à $4bb + 4bd + 2dd$. Or le quarré de BC ou bb avec celui de $BC + BD$, ou $b + d$, eſt $2bb + 2bd + dd$, moitié de $4bb + 4bd + 2dd$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XI.

Dans tout triangle ambligone, le quarré du côté qui eſt la baſe de l'angle obtus, eſt égal aux quarrez faits ſur les deux autres côtez; plus deux fois le rectangle du côté ſur lequel tombe la perpendiculaire (hauteur du triangle) & du prolongement de ce côté juſqu'à cette perpendiculaire. Eucl. II. Prop. 12. 27

Je ſuppoſe que le triangle ABC eſt ambligone, que l'angle ACB eſt obtus; & que AD hauteur du triangle ABC tombe perpendiculairement ſur le côté BC prolongé. Ce qui étant, il faut démontrer que le quarré de AB, baſe de l'angle obtus ACB, eſt égal aux quarrez des deux autres côtez AC & BC, plus deux fois le rectangle fait du côté BC & de ſon prolongement, compris entre l'angle obtus C & la perpendiculaire AD; ce qui



s'exprime ainſi : $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$.

L'angle ADB étant droit * $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$. Et par la même raiſon $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 +$

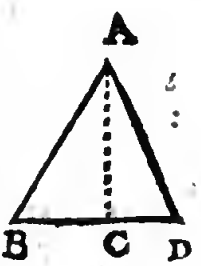
* L. 2. n. 142.

$+\overline{AD}^2$. Mais $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + 2BC \times CD + \overline{CD}^2$*. Subſtituant donc cette grandeur en la place de $\overline{BD}^2$; & en la place de $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ la grandeur égale $\overline{AC}^2$, on aura $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XII.

28 *Dans tout triangle oxygone ou acutangle, le quarré d'un de ſes côtez eſt égal aux quarrez des deux autres côtez moins deux fois le rectangle fait d'un deſdits autres côtez, & d'une de ſes parties compriſe entre la perpendiculaire qui la coupe, & l'angle oppoſé au côté premierement pris.* Eucl. II. Prop. 13.

Je ſuppoſe que le triangle ABD eſt oxygone, que AC eſt une perpendiculaire qui tombe ſur le côté BD; il faut démontrer que le quarré de AB eſt égal aux quarrez des deux autres côtez AD, & BD moins deux fois le rectangle fait du côté entier BD, & de ſa partie DC compriſe entre la perpendiculaire AC & l'angle D oppoſé au côté AB premierement pris; il faut ainſi démontrer $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times DC$.



L'angle ACD étant droit $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2$†. Otant $\overline{DC}^2$ de part & d'autre, vient $\overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$. Cette ſouſtraction ſe fait com-

* *Sup.* n. 20. † *L.* 1. 142.

comme on l'a enſeigné, effaçant $\overline{DC}^2$, où il étoit avec le ſigne +, & l'écrivant de l'autre côté avec le ſigne −.

Puiſque *ACB* eſt droit; donc * $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$. Or $BC = BD - DC$: Le quarré de $BD - DC$ eſt $\overline{BD}^2 - 2BD \times DC + \overline{DC}^2$. Ainſi $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 - 2BD \times DC + \overline{DC}^2$. Mettant donc à la place de $\overline{AC}^2$ & $\overline{BC}^2$ les grandeurs qui leur ſont égales, on aura $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times DC + \overline{DC}^2$. (Et comme $-\overline{DC}^2 + \overline{DC}^2 = 0$.) $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times DC$; ce qu'il falloit démontrer.

SECTION III.

Des raiſons & proportions des Lignes, des Surfaces & des Solides.

AVERTISSEMENT.

ON *peut conſiderer ce qu'une ligne eſt en elle-même, ou ce qu'elle eſt par rapport à d'autres; lequel rapport fait qu'on dit qu'elle eſt égale ou inégale, petite ou grande: il en eſt de même des ſurfaces, & des ſolides. Or on peut rapporter une ligne à une autre, & les comparer differemment, conſiderant ou l'excès de l'une par deſſus l'autre, c'eſt à dire, leur difference; ou la* 1

* *L. 2, P. 142.*

maniere dont l'une contient l'autre; ce qui fait deux ſortes de rapports. Les Géometres ne conſiderent guere que le ſecond. Auſſi lui donnent-ils le nom de Raiſon, qui en général ſignifie rapport. C'eſt des raiſons ou de la ſeconde ſorte de rapport, que nous allons parler.

Autrefois les Interpretes d'Euclide définiſſoient les raiſons, une habitude de deux grandeurs de même genre, comparées l'une avec l'autre ſelon la quantité. *L'on ne compare les choſes entre elles, que lorſqu'elles ſont de même genre; car on ne compare pas la longueur avec la chaleur. Quand on parle de la raiſon de deux choſes, c'eſt donc leur quantité ou grandeur que l'on compare. Mais le mot d'*habitude *étoit employé ici mal-à-propos.*

Le terme Grec dont Euclide s'eſt ſervi, & qu'ils traduiſent habitude, *ſignifie maniere d'être d'une choſe à l'égard d'une autre; & c'eſt ce que ſignifie dans la Géometrie le mot de Raiſon; mais comme je l'ai dit, c'eſt de la ſeconde ſorte de rapport qu'il s'agit; ce que vous allez voir dans les Définitions ſuivantes.*

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

29 *Raiſon d'une ligne à une ligne, d'un plan à un plan, d'un ſolide à un ſolide; c'eſt la maniere dont une ligne contient ou eſt contenue dans celle avec qui on l'accompare; qu'un plan contient, ou eſt contenu dans un plan; un ſolide contient ou eſt contenu dans un ſolide, avec lequel on le compare.*

C'eſt par la diviſion qu'on connoit la maniere qu'une grandeur eſt contenue dans une autre gran-

grandeur. Ainſi pour exprimer le rapport, ou la raiſon d'une ligne à une autre, comme de la ligne *A* à la ligne *B* on diviſe *B* par *A*, écrivant comme on l'a marqué l'une ſous l'autre, $\frac{B}{A}$ ou $\frac{A}{B}$. Cette expreſſion expoſe ou exprime la raiſon de *A* à *B*, c'eſt-à-dire, combien de fois, & de quelle maniere *A* eſt dans *B*, ou quelle partie *B*, eſt de *A*; ce qui ſe nomme l'Expoſant de la raiſon de *A*, à *B*.

DEFINITION II.

Une raiſon dont l'expoſant ſe peut exprimer en nombres, s'appelle Raiſon de nombre à nombre. 30

L'expoſant marque la maniere qu'une grandeur eſt contenue dans une autre, ou qu'elle la contient; c'eſt-à-dire, en termes d'Arithmetique, quel eſt le quotient de la diviſion de ces deux grandeurs l'une par l'autre. Si cet expoſant ou ce quotient eſt un nombre, que par exemple la ligne *B* ſoit en *A* ſix fois, la raiſon de ces deux lignes *A* & *B* eſt une raiſon de nombre à nombre.

DEFINITION III.

Une raiſon dont l'expoſant ne ſe peut exprimer par aucun nombre, ſe nomme Sourde ou Irrationelle. 31

Si on ne peut trouver aucun nombre qui marque exactement combien de fois la ligne *A* contient ou eſt contenue dans la ligne *B*, la raiſon de ces deux lignes *A* & *B* eſt ſourde. On démontrera dans la ſuite qu'il y a de telles raiſons.

DEFINITION IV.

32 *L'égalité des raiſons ſe nomme Proportion.*

S'il y a même raiſon de A à B que de C à D, on dit de ces quatre grandeurs qu'elles ſont proportionelles; ce qu'on marque ainſi:

$$A.\ B.\ ::\ C.\ D.$$

On a dit que la raiſon de A à B s'exprime de cette maniere $\frac{A}{B}$; ainſi celle de C à D de la même façon $\frac{C}{D}$. Par conſéquent la proportion de ces quatre lignes, qui conſiſte dans l'égalité de leurs raiſons, ſe peut auſſi exprimer de cette maniere:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

DEFINITION V.

33 *Le premier terme d'une raiſon ſe nomme l'Antécédent, l'autre terme le Conſéquent.*

L'antécédent c'eſt la choſe qui eſt rapportée, ou comparée; le conſéquent celle avec qui ſe fait la comparaiſon. Toute comparaiſon ſuppoſe deux termes. La raiſon, qui eſt un rapport ou comparaiſon, demande donc deux termes.

DEFINITION VI.

Une proportion à deux antécédens, & deux
34 *conſéquens.*

La proportion eſt une égalité de raiſons qu'on compare. Chaque raiſon ſuppoſe deux termes. La proportion en demande donc quatre.

DEFINITION VII.

35 *Le même terme dans une proportion peut ſervir de*

de conſéquent & d'antécédent ; & quand cela eſt, cette proportion ſe nomme Continue.

Si *A* eſt à *B* comme *B* à *C*, cela fait deux raiſons égales, & par conſéquent qui font cette proportion.

A. B: : B. C.

Or *B* ſert dans cette proportion de conſéquent à la premiere raiſon, & d'antécédent à la ſeconde raiſon. Cette proportion ſe marque ainſi :

∺ *A. B. C.*

On nomme cette proportion Continue, à cauſe que les lettres qui la marquent ſont de ſuite, ſans interruption.

DEFINITION VIII.

Une proportion continue quand elle a plus de trois termes, s'appelle progreſſion. 36

Si *A* eſt à *B* comme *B* à *C*, & *B* à *C* comme *C* à *D*, & *C* à *D* comme *D* à *E*, & de ſuite ; cela s'appelle Progreſſion, qu'on exprime ainſi :

∺ *A. B. C. D. E.* &c.

DEFINITION IX.

Lorſque d'un côté il y a un certain nombre de grandeurs, trois d'une part par exemple, & autant de l'autre, ſavoir trois : Si en les comparant toutes ſix, 1°, la premiere avec la ſeconde, & la quatrieme avec la cinquieme ; 2°, la ſeconde avec la troiſieme, & la cinquieme avec la ſixieme, on les trouve en proportion, on dira que cette proportion eſt ordonnée. 37

Soient *A. B. C* d'un côté, & *D. E. F* de l'autre. Si *A. B:: D. E* & *B. C:: E. F*, cette proportion ſera ordonnée.

DEFINITION X.

38 *Trois grandeurs étant d'un côté & trois d'un autre : Si en comparant la premiere avec la seconde, & la cinquieme avec la ſixieme, elles ſont en proportion : & qu'en changeant d'ordre on compare la ſeconde à la troiſieme, & la quatrieme à la cinquieme & qu'elles ſoient encore en proportion, alors cette proportion s'appelle Troublée.*

Soient $\left\{\begin{matrix} A. & B. & C \\ 12 & 8 & 4 \end{matrix}\right.$ & $\left\{\begin{matrix} D. & E. & F \\ 12 & 6 & 4. \end{matrix}\right.$

Si $A.B :: E.F$ & $B.C :: D.E$, cette proportion ſe nomme Troublée, à cauſe qu'on n'y garde pas le même ordre.

DEFINITION XI.

39 *Le premier & le dernier terme d'une proportion, s'appellent les Extrêmes de cette proportion: & le ſecond & le troiſieme, les termes Moyens.*

Soit cette proportion $A. B :: C. D$; les extrêmes ſont A & D; & B & C les moyens.

DEFINITION XII.

40 *Les termes Omologues d'une proportion ſont ceux qui tiennent le même rang, ou qui ſont de même nom.*

Dans cette proportion $A. B :: C. D$, les termes A & C qui ſont les antécédens, & B & D qui ſont les conſéquens, ſont termes Omologues.

Propoſitions évidentes touchant les Raiſons & les Proportions.

PROPOSITION I.

Les raiſons égales ont des expoſans égaux.

41 L'expoſant d'une raiſon marque la maniere que

que l'un de ces termes eſt contenu dans l'autre. Si les manieres ſont égales, les expoſans ſont égaux.

Proposition II.

Les grandeurs égales ne peuvent être les expoſans que de raiſons égales. 42

Soit X l'expoſant de la raiſon de A à B, & de la raiſon de C à D; ces deux raiſons doivent être égales, puiſque l'une contient l'autre de la même maniere.

Lemme.

Le premier terme d'une raiſon devient égal au ſecond, quand on le multiplie par l'expoſant de cette raiſon. 43

Soit A le premier terme ou l'antécédent de la raiſon de A à B. L'expoſant de cette raiſon, ou ce qui eſt la même choſe, le quotient de la diviſion de ces termes l'un par l'autre q, il marque combien de fois A eſt dans B, ou quelle partie B eſt de A. Par conſéquent étant pris autant de fois qu'il y eſt contenu, c'eſt-à-dire, étant multiplié par q *, il doit devenir égal à B qu'il a diviſé. Ainſi $Aq = B$; ce qu'il falloit prouver.

Remarque.

Je ſuppoſe preſque toujours dans la ſuite, que ce ſera l'antécédent qui ſera plus petit. Ainſi l'ayant nommé A *&* B *le conſéquent, je dirai que* A q = B; *quoique s'il en étoit au contraire, & que l'antécédent* A *fût plus grand que le conſéquent* B, *il ſoit également vrai de dire, que le terme* A *multiplié par l'expoſant de* A *à* B *produira toujours le conſéquent* B, *puiſque l'expoſant peut marquer également la maniere de contenir ou d'être contenu, ſoit que la raiſon ſoit*

 ſour-

* *ſup. n.* 4.

ſourde ou de nombre à nombre. Ainſi lorſque l'antécédent A *eſt plus petit que le conſéquent* B, *l'expoſant de cette raiſon ſera plus grand que l'unité; & au contraire plus petit (ce qu'on nomme arithmetiquement une fraction) lorſque l'antécédent eſt plus grand que le conſéquent. Mais de quelque maniere que la proportion ſoit ordonnée, le premier terme multipliant l'expoſant de ſa raiſon au ſecond, il produira toujours ledit ſecond terme qu'il avoit diviſé.*

PROPOSITION III.

44 *Quatre termes demeurent en proportion, quelque changement qu'on y faſſe, pendant que le premier antécédent eſt à ſon conſéquent, comme le ſecond antécédent, eſt à ſon conſéquent.* C'eſt la définition même de la proportion.

PROPOSITION IV.

45 *Quatre grandeurs étant proportionnelles*, permutando, *c'eſt-à-dire, les changeant & faiſant que les antécédens deviennent les conſéquens, elles ſeront encore proportionnelles.*

Si *A. B:: C. D*, il faut prouver que *B. A :: D. C.*

Contenir & être contenu, ſont des termes réciproques. Ainſi ſi *A* contient *B*, comme *C* contient *D*, & par conſéquent qu'il y ait égalité de raiſons, il faut que *B* ſoit contenu dans *A*, comme *D* eſt contenu dans *C*, & qu'ainſi il y ait encore égalité de raiſons. Quand on tire une conſéquence de cette proportion, cela s'appelle conclure *permutando*, ou par raiſon inverſe.

PROPOSITION V.

46 *Quatre grandeurs étant proportionelles*, alternando, *c'eſt-à-dire, en comparant le premier an-*

antécédent avec le ſecond antécédent, & le premier conſéquent avec le ſecond conſéquent, ces quatre grandeurs ſeront encore proportionnelles. Eucl. V. Prop. 16.

Soit cette proportion *A. B :: C. D.* Il faut prouver qu'*alternando A. C :: B. D.* Suppoſant que *q* eſt l'expoſant de ces deux raiſons * *Aq = B*, & *Cq = D*. Donc au-lieu de *A. B :: C. D*, je puis écrire *A. Aq : : C. Cq* Il faut donc prouver qu'*alternando A. C : : Aq Cq*; ce qui eſt évident : puiſque le quotient de *C* diviſé par *A* eſt $\frac{C}{A}$, le même que celui de *Cq* diviſé par *Aq*, qui eſt $\frac{Cq}{Aq}$. Or ſelon les règles de la Diviſion †, on peut effacer *q* qui eſt au deſſus & au-deſſous de la ligne, après quoi il ne reſte que $\frac{C}{A}$; Ainſi ces deux raiſons ayant un même expoſant, ſont égales.

Proposition VI.

Ajoutant aux deux termes d'une raiſon deux autres termes de même raiſon, à l'antécédent de la premiere l'antécédent de la ſeconde, au conſéquent de la premiere le conſéquent de la ſeconde, la même raiſon demeure. 47

Soit cette proportion *A. B :: C. D*, il faut prouver que *A + C. B + D : : A. B.* L'expoſant des raiſons de *A* à *B* & de *C* à *D* eſt *q*. Ainſi ‡ *Aq = B*, & *Cq = D*. Il faut donc prouver que *A + C. Aq + Cq : : A. B.*

Le quotient de *Aq + Cq* diviſé par *A + C*, eſt *q* ‡. Donc ces deux termes *A + C* & *Aq*

* *Sup.* n. 43. † *Sup.* n. 4. ‡ *Sup.* n. 43. ‡ *Sup.* n. 4.

$+Cq$ ayant un même exposant que A & Aq, ou que A & B, ils ont la même raison [a].

Proposition VII.

48 *Retranchant des deux termes d'une raison deux autres termes de même raison, l'antécédent de l'antécédent, le conséquent du conséquent, la même raison demeure.*

Soit cette proportion $A\ B :: C.D$, il faut prouver que $A-C.B-D :: A.B$. Si l'exposant de ces raisons est q: donc $Aq=B$ & $Cq=D$ [b]. Il faut ainsi prouver que $A-C.\ Aq-Cq :: A.B$. Or le quotient de $Aq-Cq$ divisé par $A-C$ est q: donc ces deux termes ont le même exposant, & partant la même raison que A & B.

Proposition VIII.

49 *Quatre grandeurs étant en proportion*, Componendo, *c'est-à-dire, le premier antécédent, plus son conséquent, est à son conséquent, comme le second antécédent plus son conséquent, est à son conséquent.* Eucl. V. Prop. 18.

$A.B :: C.D$, il faut démontrer que $A+B.B :: C+D.D$ 1°. *alternando* $AC :: B.D$ [c]. Donc ajoutant [d] à A & à B les termes C & D, qui sont en même raison [e] $A+B.C+D :: B.D$; & derechef *alternando* $A+B.B :: C+D.D$: ce qu'il falloit démontrer.

Proposition IX.

50 *Lorsque plusieurs grandeurs sont en proportion, la somme des antécédens est à celle des conséquens comme chaque antécédent est à son conséquent*, Eucl. V. Prop. 12.

Soit $A.B :: C.D :: E.F$, il faut prouver que

a *sup.* n. 41. b *sup.* n. 43. c *sup.* n. 46. d *sup.* n. 46. e *sup.* n. 47.

que $A+C+E, B+D+F :: A. B :: C. D :: E. F.$ Par la Propoſition précédente $A+C. C :: B+D. D.$ *alternando* $A+C. B+D :: C. D$ Or la raiſon de C à D eſt la même, que celle de E à F: donc $A+C. B+D :: E. F.$ *alternando* $A+C. E :: B+D. F$: donc encore, ſelon la précédente $A+C+E. B+D+F :: E. F$, ou $A. B$, ou $C. D$; car c'eſt toujours la même raiſon. C'eſt ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION X.

Quatre grandeurs étant en proportion, dividendo, *c'eſt-à-dire, le premier antécédent moins ſon conſéquent, eſt à ſon conſéquent comme le ſecond antécédent moins ſon conſéquent eſt à ſon conſéquent.* Euclide V. Prop. 17. 51

Soit $A. B :: C. D.$ Il faut prouver que $A-B. B :: C-D. D$ Puiſque $A. B :: C. D$: donc *alternando* $A. C :: B. D$: donc ôtant B de A & D de C*, $A-B. C-D :: A. C.$ Or la raiſon de A à C eſt la même que celle de B à D; ainſi $A-B. C-D :: B. D.$ Donc *alternando* $A-B. B :: C-D. D$; ce qu'il falloit prouver.

* *ſup. n. 8.*

AVERTISSEMENT.

La raiſon inverſe de la diviſion, c'eſt-à-dire, le changement d'une proportion où l'on conclud dividendo, *s'appelle converſion de raiſon: par exemple, ſi* A — B. B :: C — D. D, *en changeant ainſi* A — B. C — D :: B. D. *après ce dernier changement, la proportion demeure encore, comme il eſt évident*; & *cela ſe nomme* Converſion de Raiſon, *terme qui n'eſt point neceſſaire.*

PROPOSITION XI.

52 *Deux grandeurs qui ont une même raiſon avec une troiſieme, ſont égales entre elles.* Eucl. V. Prop. 9.

Si $A. B :: C. B.$ il faut que $A = C$: car q ſoit l'expoſant de la raiſon de A à B; il le ſera de celle de C à B, qui eſt la même: donc $Aq = B$, & $Cq = B$*, partant $Aq = B = Cq$. Ces deux grandeurs étant égales à une troiſieme, ſavoir, à B, elles ſont égales entre elles par le troiſieme Axiome.

PROPOSITION XII.

53 *Deux raiſons égales à une troiſieme raiſon, ſont égales entre elles.* Eucl. V. Prop. 11.

Si $A. B :: E. F$, & $C. D :: E. F$, il faut prouver que $A. B :: C. D$. Si l'expoſant de la raiſon de A à B eſt q, celui de la raiſon de E à F qui eſt la même, eſt auſſi q. Or celui de C à D eſt le même, que celui de la raiſon de E à F. C'eſt donc encore q. Les deux raiſons de A à B, & C à D, ont donc un même expoſant; ainſi elles ſont égales †.

PROPOSITION XIII.

54 *Lorſque deux grandeurs ſont multipliées par une même grandeur, elles ſont en même raiſon après avoir été multipliées, qu'avant que d'être multipliées.*

On a multiplié A & B par x, il faut prouver que $Ax. Bx :: A. B$. L'expoſant de la raiſon de A à B eſt $\frac{A}{B}$, & celui de la raiſon de Ax à Bx eſt $\frac{Ax}{Bx}$. Or c'eſt un même expoſant; car dans $\frac{Ax}{Bx}$ ayant effacé x qui ſe trouve au deſſus & au

* *ſup. n.* 43. † *ſup. n.* 42.

& au deſſous de la ligne, reſte * $\frac{A}{B}$; par-

tant ces deux raiſons ayant un même expoſant, elles ſont égales †.

PROPOSITION XIV.

Diviſant deux grandeurs par une troiſieme, les quotiens de ces diviſions ſeront en même raiſon que ces grandeurs. 55

Soient deux grandeurs B & D. Je les diviſe par x. Le quotient de B par x ſoit nommé p, & celui de D par x, ſoit nommé q; il faut prouver que $p.q :: B.D$. Or $px = B$, & $qx = D$; donc $px.qx :: B.D$. p & q ayant été multipliez par x, ſelon la Propoſition précédente $px.qx :: p.q$. Donc puiſque $px.qx :: p.q$, il faut que $p.q :: B.D$ ‡: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

Lorſque quatre grandeurs ſont proportionnelles, le produit ou le rectangle des extrêmes eſt égal à celui des moyens. Eucl. VI. Prop. 16. 56

$A.B :: C.D$. Il faut prouver que $A \times D = B \times C$. Soit x l'expoſant de ces deux raiſons égales: donc $Ax = B$ & $Cx = D$; ainſi je puis exprimer cette proportion de la ſorte: $A.Ax :: C.Cx$. Il faut donc démontrer que $ACx = ACx$; ce qui eſt evident.

COROLLAIRE.

Trois grandeurs étant en proportion continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du terme moyen. Eucl. VI. Prop. 17. 57

Soient $\div A.B.C$. Puiſque $B.B :: B.C$: donc $AC = BB$, ou $AC = B^2$.

* *ſup.* n 4. † *ſup.* n. 4. ‡ *ſup.* n. 53.

PROPOSITION XVI.

8 *Lorſque quatre grandeurs ſont tellement diſpoſées, que le rectangle ou produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, elles ſont proportionnelles.* Eucl. VI. Prop. 16.

Dans ces quatre lignes, $A.B, C, D$ le produit AD des extrêmes eſt égal à BC produit des moyens: il faut démontrer que $A.B :: C.D$. ſoit x le quotient de B diviſé par A, & z celui de D par C: donc $Ax = B$, & $Cz = D$. Ainſi je réduis ces quatre termes à ceux-ci, $A.Ax$, $C.Cz$. Selon qu'on le ſuppoſe $A \times Cz = Ax \times C$. Otant de part & d'autre $A \times C$, reſtera $z = x$. Par conſéquent l'expoſant de la raiſon de A à B eſt égal à celui de la raiſon de C à D; ainſi elles ſont égales*: par conſéquent ces quatre grandeurs ſont proportionnelles.

COROLLAIRE I.

59 *En changeant les quatre termes d'une proportion, pourvu que les deux mêmes termes ſoient toujours ou les deux extrêmes ou les deux moyens, ils ſeront toujours rangez proportionellement.*

Soient ces quatre termes $A.B :: C.D$, pourvu que A & D, par exemple, ſoient toujours ou les deux moyens ou les deux extrêmes, leurs produits ſeront toujours égaux; par conſéquent ils ſeront proportionnels, ſelon cette Propoſition.

COROLLAIRE II.

60 *Diviſant le produit des moyens d'une proportion par le premier, le quotient de la diviſion ſera le quatrieme terme; & diviſant ce même produit par le quatrieme, le quotient ſera le premier.*

Car

* *ſup.* n. 41.

Car ce quotient, multipliant le diviſeur, refait le même produit qui a été diviſé *.

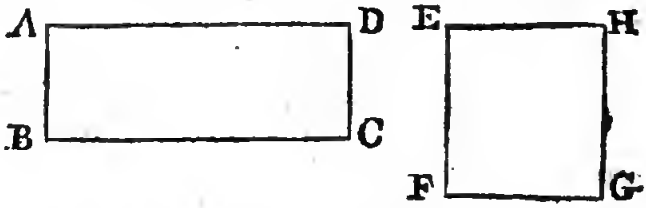
REMARQUE.

Remarquez que ces deux dernieres Propoſitions & leurs Corollaires ſont d'un très grand uſage dans la Géometrie, auſſi-bien que dans l'Arithmetique, étant le fondement de toutes les Règles de trois, ou de proportion.

DEFINITION.

Le produit de deux grandeurs étant égal à celui de deux autres (elles peuvent donc faire une proportion,) *ſi la premiere eſt à la troiſieme, comme la quatrieme eſt à la ſeconde, cette proportion ſe nomme Réciproque, ou Inverſe.* 61

Soient ces deux rectangles *AC* & *EG* égaux. ſi *AB. EF*:: *FG. BC*, cette proportion ſe



nommera *Réciproque ou Inverſe*, laquelle commence & finit dans la même figure. Si un des côtez de ces deux rectangles eſt plus grand, l'autre eſt réciproquement plus petit.

PROPOSITION XVII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'un côté, & autant d'autres d'un autre côté, leſquelles étant priſes de deux en deux ſoient en même raiſon; celles-là en raiſon égale, ſeront proportionnelles. Eucl. V. Prop. 22. 62

Soient trois grandeurs *A*, *B*, *C* d'un côté, & trois

* *Sup. n.* 4.

trois autres *D*, *E*, *F* de l'autre côté. Si *A*, *B* :: *D*. *E* & *B*. *C* :: *E*. *F*, il faut démontrer qu'en raiſon égale *A*. *C* :: *D*. *F*.

1°. *Alternando*. *B*. *F* :: *A*. *D*, & *B*. *E* :: *C*. *F* [a]: donc les deux raiſons de *A* à *D*, & de *C* à *F* étant égales à celle de *B* à *E*, elles ſont égales [b]: par conſéquent *A*. *D* :: *C*. *F*, & *alternando A*. *C* :: *D*. *F*; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVIII.

63 *Si la premiere eſt à la ſeconde comme la troiſieme à la quatrieme, & la cinquieme à la ſeconde comme la ſixieme à la quatrieme, la premiere plus la cinquieme ſera à la ſeconde, comme la troiſieme plus la ſixieme ſera à la quatrieme.* Eucl. V. Prop. 24.

Soient *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, ſix grandeurs; ſi la premiere *A* eſt à la ſeconde *B* comme la troiſieme *C* eſt à la quatrieme *D*, & la cinquieme *E* à la ſeconde *B* comme la ſixieme *F* à la quatrieme *D*; ce qui s'exprime ainſi:

A. *B* :: *C*. *D*. & *E*. *B* :: *F*. *D*.

Je dis que *A*. + *E B* :: *C* + *F*. *D*; car 1°. *alternando* [c], *A*. *C* :: *B*. *D* & *E*. *F* :: *B*. *D*: donc [d] *A*. *C* :: *E*. *F*: donc *A* + *E*. *C* + *F* :: *A*. *C* [e]. Et puiſque *A*. *C* :: *B*. *D*; donc *A* + *E*. *C* + *F* :: *B*. *D* [f], & *alternando A* + *E*. *B* :: *C* + *F*. *D*; ce qu'il falloit démontrer.

Propoſitions touchant les Proportions qu'Euclide, dans ſon cinquieme Livre, énonce d'une autre maniere que nous n'avons fait.

Euclide nomme Grandeur multiple, celle qu'une

a *ſup.* n. 46. b *ſup.* n. 53. c *ſup.* n. 46. d *ſup.* n. 53. e *ſup.* n. 47. f *ſup.* n. 53.

qu'une plus petite grandeur mesure exactement tant de fois; & Grandeurs équimultiples, celles qui contiennent un égal nombre de fois la grandeur dont elles sont multiples. Le produit d'une grandeur multipliée par une autre, est le multiple de cette grandeur. Ainsi Ax est le multiple de A; mais A & B ayant été multipliez par le même multiplicateur x, ces deux produits Ax & Bx sont équimultiples de A & B. Les Propositions suivantes ont été démontrées ci-dessus, comme vous l'allez voir. On ne les met donc ici, que parce qu'elles n'ont pas été proposées de la maniere que le fait Euclide, dans son Livre V.

Proposition I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, équimultiples d'autant d'autres grandeurs, chacune à la sienne; comme l'une sera multiple de l'une, ainsi les toutes seront multiples des toutes. 64

J'exprime ainsi cette Proposition: Bx & Cx étant équimultiples de B & de C, je dis que la grandeur Bx est à B & Cx à C, comme $Bx + Cx$ à $B + C$.

1°. $Bx.Cx :: B.C$ *. 2°. *alternando*. $Bx.B :: Cx.C$. 3°. Ajoutant donc à Bx & à B les grandeurs Cx & C, qui sont en même raison †, $Bx.B :: Bx + Cx.B + C$, & $Cx.C :: Bx + Cx.B + C$; ce qu'il falloit prouver.

Proposition II.

Si la premiere est autant multiple de la seconde, que la troisieme de la quatrieme, & la cinquieme autant multiple de la seconde, que la sixieme de la quatrieme; la composée de la premiere & de la cinquieme sera autant multiple 65

de

* *sup.* n. 54. † *sup.* n. 47.

de la ſeconde, que la compoſée de la troiſieme & de la ſixieme le ſera de la quatrieme.

Si *A. B :: C. D*, & que *E. B :: F. D*: je dis que *A + E. B :: C + F. D.*

Puiſque *A. B :: C. D* & *E. B :: F. D*; donc *alternando A. C :: B. D* & *E. F :: B. D.* Ainſi la raiſon de *A* à *C* eſt la même que celle de *E* à *F*, ces deux raiſons étant la même que celle de *B* à *D* *; Partant *A. C :: E. F.* Donc ajoutant *E* avec *A*, & *F* avec *C* † *A + E*, *C + F :: B. D.* Or *alternando A + E. B :: C + F. D*: ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION III.

66 *Si la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, que la troiſieme de la quatrieme, & qu'on prenne les équimultiples de la premiere & de la troiſieme; le multiple de la premiere ſera autant multiple de la ſeconde, que le multiple de la troiſieme le ſera de la quatrieme.*

Une grandeur multiple contient celle dont elle eſt le multiple; ainſi c'eſt la même choſe que ſi on diſoit, ſi la premiere contient autant de fois la ſeconde, que la troiſieme contient la quatrieme. Ainſi il s'agit de démontrer que ſi *A. B :: C. D*, & que *E* & *F* ſoient équimultiples de *A* & *C*; c'eſt-à-dire, que *E* contienne *A* comme *F* contient *C*, qu'ainſi *A. C :: E. F*; il faut que *B. D :: E. F.* Car puiſque *A. B :: C. D*; donc *alternando A. C :: B, D.* Or *A. C :: E. F.* Ainſi la raiſon de *B* à *D* eſt la même que celle de *E* à *F*, étant égale à une même raiſon ‡.

PROPOSITION IV.

67 *Si la premiere eſt à la ſeconde en même raiſon que la troiſieme à la quatrieme; auſſi les équimul-*

* *ſup.* n. 53. † *ſup.* n. 47. ‡ *ſup.* n. 53.

multiples de la premiere & de la troiſieme, auront même raiſon aux équimultiples de la ſeconde & de la quatrieme, en quelque multiplication que ce ſoit, ſi elles ſont priſes ainſi qu'elles ſe répondent.

Cela veut dire que ſi $A.B::C.D$, ainſi *alternando* $A.C::B.D$; il faut que $Ax.Cx::Bz.Dz$.

Car [a] $Ax.Cx::A.C$; & $Bz.Dz::B.D$. Mais, $A.C::B.D$; donc [b] $Ax.Cx::Bz.Dz$: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

Si une grandeur eſt autant multiple d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée; auſſi le reſte ſera autant multiple du reſte, que la toute de la toute. 68

Cette Propoſition ſe peut exprimer ainſi: Si $A.B::E.F$; je dis que $A-E.B-F::A.B$. Car alors on leur ôte des grandeurs qui ſont en même raiſon: ainſi elles demeurent en même raiſon [c].

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs ſont équimultiples de deux autres grandeurs, & qu'on retranche d'elles des équimultiples, ou les reſtes ſeront égaux aux mêmes, ou équimultiples d'elles. 69

J'exprime ainſi cette Propoſition. Si $Ax.Bx::Ax-C.Bx-D$; je dis que $Ax-C.Bx-D::A.B$.

Cela eſt évident: car $Ax.Bx::A.B$ [d]. Or deux raiſons égales à une troiſieme, ſont égales [e]. Ainſi ſi $Ax.Bx::Ax-C.Bx-D$; il faut que $Ax-C.Bx-D::A.B$.

PRO-

a *ſup. n.* 54. b *ſup. n.* 53. c *ſup. n.* 48.
d *ſup. n.* 54. e *ſup. n.* 53.

PROPOSITION VII.

70 *Les grandeurs ſont entre elles comme ſont leurs équimultiples entre elles, étant priſes comme elles ſe répondent.*

$Bx. Cx :: B. C$ ou $Bx. B :: Cx. C$; c'eſt ce qui a été prouvé *.

Les autres Propoſitions du cinquieme Livre d'Euclide, ſont dans les endroits qui leur conviennent.

SECTION IV.

Des Raiſons Compoſées, & de leurs Proprietez.

AVERTISSEMENT.

LOrſque l'expoſant d'une raiſon eſt ſimple, l'on doit dire de cette raiſon qu'elle eſt ſimple; & qu'elle eſt compoſée, ſi ſon expoſant eſt fait de l'addition ou de la multiplication de deux ou de pluſieurs autres expoſans. Par exemple, l'expoſant de la raiſon de A *à* B *ſoit* 5. *ſi on conſidere que ce nombre peut être fait de l'addition de* 2 *&* 3 *expoſans de la raiſon double, & de la raiſon triple, on pourroit dire que la raiſon de* A *à* B *eſt compoſée. Si l'expoſant de cette raiſon de* A *à* B *étoit* 6, *nombre qui eſt fait de deux multiplié par trois; c'eſt pour lors qu'on doit dire que cette raiſon eſt compoſée, ſavoir, de ces deux expoſans* 2 *&* 3 *multipliez l'un par l'autre. Car l'uſage veut que par une raiſon compoſée on n'entende qu'une raiſon dont l'expoſant eſt fait non par l'addition, mais ſeulement*

* *Sup. n.* 54.

ment par la multiplication de deux ou de plusieurs exposans.

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

Les raisons composées sont celles dont les exposans sont faits de la multiplication de deux ou plusieurs exposans. 71

Soit la raison de A à B dont x est l'exposant, & que $x = zy$; alors cette raison de A à B est dite composée des deux raisons, dont z & y sont les exposans.

DEFINITION II.

Une raison composée de deux raisons égales, s'appelle Doublée. 72

Si l'exposant de la raison de A à B est fait de z multiplié par z, c'est-à-dire, si zz est l'exposant de cette raison, elle est doublée.

COROLLAIRE.

Ainsi une raison qui a pour son exposant un quarré, est une raison doublée. 73

Soit zz, ou z^2, l'exposant de la raison de A à B. Il est fait de z multiplié par z, ainsi de deux exposans égaux: il est donc l'exposant d'une raison doublée.

DEFINITION III.

Une raison composée de trois raisons égales, se nomme Triplée. 74

COROLLAIRE.

Ainsi une raison qui a pour son exposant un cube, est une raison Triplée. 75

Si le cube zzz, ou z^3 est l'exposant de la raison de A à B, cette raison est triplée; car son ex-

exposant est fait de la multiplication de ces trois grandeurs égales z, z, z.

THEOREME I.

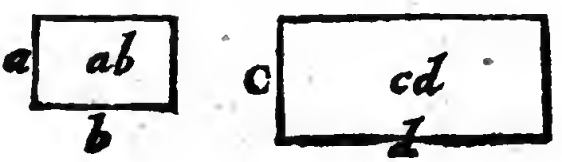
76 *Plusieurs grandeurs étant de suite, la raison de la premiere à la derniere est composée des raisons de toutes les grandeurs qui sont entre les deux extrêmes.*

Soient ces grandeurs A, B, C, D, E, F, &c. Il faut démontrer que la raison de A à C est composée de celles de A à B, & de B à C. Soit x l'exposant de A à B, donc $Ax = B$ *; celui de B à C est z: donc par la même raison Bz, ou $Axz = C$. Ainsi je puis changer les trois grandeurs A, B, C en celles-ci A, Ax, Axz. Je divise Axz par A, le quotient de la division sera xz exposant de la raison de A à Axz, lequel est fait des exposans de ces raisons multipliez l'un par l'autre; partant par la premiere Définition, la raison de A à C est composée de celle de A à B, & de celle de B à C. Par cette méthode je puis démontrer, que la raison de A à F est composée de toutes les raisons des grandeurs interposées.

THEOREME II.

77 *La raison de deux plans est composée des raisons qu'ont les côtez de l'un aux côtez de l'autre, de la largeur à la largeur, de la longueur à la longueur.*

Soient ces deux plans ab & cd. Il faut démontrer que leur raison est composée de celle de



* *sup.* n. 43.

a à *c* & de *b* à *d*. Soit *z* expoſant de la raiſon de *a* à *c*: donc * $az=c$. Soit *x* celui de *b* à *d*, alors $bx=d$, & $azbx=cd$. Diviſant $azbx$ par ab, le quotient ſera zx compoſé de *z* & de *x* expoſans des raiſons de *a* à *c*, & de *b* à *d*: donc ces deux plans ſont en raiſon compoſée de celles de *a* à *c* & de *b* à *d*, c'eſt-à-dire, de leurs côtez: ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

Il faut ſe ſouvenir qu'on ſuppoſe toujours ici, que tous les Plans & les Solides ſont rectangles; ainſi qu'on l'a fait remarquer ci-devant.

THEOREME III.

La raiſon d'un ſolide à un autre ſolide, eſt compoſée de la raiſon qu'ont les trois côtez de l'un aux autres trois côtez de l'autre. 78

Soient deux ſolides *abc* & *def*. Il faut démontrer que leur raiſon eſt compoſée de ces trois raiſons $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{f}$. La raiſon de *abc* à *def*, ſe peut exprimer ainſi $\frac{abc}{def}$. Or cet expoſant eſt fait des trois expoſans des raiſons, dont il eſt queſtion de prouver que la raiſon de ces deux ſolides eſt compoſée. Partant ſelon la premiere Définition, ces deux ſolides ſont entre eux en raiſon compoſée de celles de leurs côtez.

THEOREME IV.

Lorſque quatre grandeurs ſont proportionelles, le produit des antécédens eſt à celui des conſéquens en raiſon doublée de celles de chaque antécédent à ſon conſéquent, ou comme les quarrez de chaque antécédent au quarré de ſon conſéquent. 79

Soit

* *ſup. n.* 43.

Soit *a. b* :: *c. d*; le produit *ac* des antécédens, ſelon la Propoſition précédente, eſt à *b d* celui des conſéquens, en raiſon compoſée de celles de *a* à *b* & de *c* à *d*, qui étant égales, cette raiſon eſt doublée [a]. Le quarré *a a* de l'antécédent *a* eſt à *b b*, quarré du conſéquent *b*, en raiſon compoſée des raiſons de *a* à *b* & de *a* à *b*; & par conſéquent doublée de ces deux raiſons. Or ces raiſons ſont les mêmes que ces deux raiſons de *a* à *b* & de *c* à *d*. Par conſéquent le produit *a c* eſt au produit *b d*, comme le quarré *a a* eſt au quarré *b b*.

COROLLAIRE.

80 *Les plans ſemblables, c'eſt-à-dire, dont les côtez ſont proportionnels, ſont entre eux en raiſon doublée de celles des côtez de l'un aux côtez de l'autre.*

Leur raiſon eſt compoſée de celles des côtez de l'un, aux côtez de l'autre [b]. Ces deux raiſons ſont égales. C'eſt donc une raiſon doublée [c].

Ainſi tous les quarrez étant des plans ſemblables, ſont en raiſon doublée de celles de leurs côtez.

THEOREME V.

81 *Lorſque ſix grandeurs ſont proportionnelles, le produit des trois antécédens eſt à celui des trois conſéquens en raiſon triplée de chaque antécédent à ſon conſéquent, ou comme le cube de chaque antécédent au cube de ſon conſéquent.*

Soient *a. b. c* :: *d. e. f*; le produit *ab c* eſt au produit *d e f*, en raiſon compoſée de celles de *a* à *d*, de *b* à *e*, & de *c* à *f*; [d]. Or ces trois raiſons ſont égales. Cette raiſon compoſée eſt donc triplée [e]. La raiſon de *a a a* cube de *a* eſt à *d d d* cube de *d* en raiſon triplée de celle de *a* à *d*. Or c'eſt

a *ſup.* n. 72. b *ſup.* n. 77. c *ſup.* n. 72.
d *ſup.* n. 78. e *ſup.* n. 74.

c'eſt la même raiſon que celle de *a* à *d*, de *b* à *e*, & de *c* à *f*; par conſéquent les produits dont il eſt queſtion, ſont entre eux comme le cube de chaque antécédent au cube de ſon conſéquent.

COROLLAIRE.

Les ſolides ſemblables, c'eſt à-dire, dont les côtez ſont proportionnels, ſont en raiſon triplée de celles des côtez de l'un au côté de l'autre. 82

Les côtez de ces deux ſolides ſemblables ſont ſix grandeurs proportionnelles; partant la raiſon de l'un à l'autre eſt triplée.

Ainſi tous les cubes étant des ſolides ſemblables, ſont en raiſon triplée de celles de leurs côtez.

THEOREME VI.

Dans une progreſſion Géometrique, la raiſon de deux termes entre leſquels il y a deux intervalles, eſt doublée; & s'il y a trois intervalles, triplée. 83

Soit ∴ *A. B. C. D.* La raiſon de *A* à *C* eſt compoſée ou égale à une raiſon compoſée de celle de *A* à *B*, & de celle de *B* à *C* *. Or ces termes étant en progreſſion, ces deux raiſons ſont égales. La raiſon qu'elles compoſent eſt donc une raiſon doublée †. On démontre de la même maniere, que la raiſon de *a* à *d* eſt triplée ‡.

THEOREME VII.

Lorſque des grandeurs ſont proportionnelles, leurs quarrez ſont proportionnels. 84

Si *a. b* : : *c. d.*; je dis que *aa. bb* : : *cc. dd.* Ces quarrez ſont en raiſon doublée de celles de leurs côtez ‡, c'eſt-à-dire, en raiſon doublée de *a* à *b*, & de *c* à *d*: Et comme ces deux raiſons ſont égales par la ſuppoſition, auſſi celles qu'el-

* *ſup. n.* 76. † *ſup. n.* 72. ‡ *ſup. n.* 74. ‡ *ſup. n.* 80.

les compoſent ſont égales; la raiſon de aa à bb, eſt donc égale à celle de cc à dd; ainſi ces quarrez ſont en proportion.

THEOREME VIII.

85 *Lorſque des grandeurs ſont proportionnelles, leurs cubes ſont proportionnels.*

Si $a. b :: c. d$; je dis que $aaa. bbb. :: ccc. ddd$: car la raiſon de a^3 à b^3, & celle de c^3 à d^3 ſont triplées des mêmes raiſons [a]. Ainſi elles ſont égales.

THEOREME IX.

86 *Trois grandeurs étant en proportion continue, le quarré de la premiere eſt à celui de la ſeconde, comme la premiere à la troiſieme.*

Soient $\div\div a. b. c$; je dis que $a^2. b^2 :: a. c$. La raiſon de a à c eſt compoſée des deux raiſons de a à b & de b à c [b], ces deux raiſons ſont égales. Ainſi la raiſon de a à c eſt doublée [c]. Or la raiſon de a^2 à b^2 eſt auſſi doublée des mêmes raiſons [d]: donc $a^2. b^2 :: a. c$.

THEOREME X.

87 *Quatre grandeurs étant en proportion continue, le cube de la premiere eſt au cube de la ſeconde, comme la premiere eſt à la quatrieme.*

Soient $\div\div b. c. d. f$. La raiſon de b à f eſt compoſée des trois raiſons interpoſées [e], & ces trois raiſons étant les mêmes, cette raiſon de b à f eſt triplée [f]. Or le cube b^3 eſt au cube c^3 en raiſon triplée de la même raiſon [g]: donc $b^3. c^3 :: b. f$.

THEOREME XI.

88 *Si trois grandeurs & autant d'autres priſes de deux en deux ſont en même raiſon, & en pro-*

a *ſup. n.* 82. b *ſup. n.* 76. c *ſup n.* 72. d *ſup. n* 80. e *ſup. n.* 76. f *ſup. n.* 74. g *ſup. n* 82.

proportion troublée, ces grandeurs en raiſon égale ſeront proportionnelles. Eucl. V. Prop. 23.

Trois grandeurs *A*, *B*, *C*, & autres *D*, *E*, *F* priſes de deux en deux, ſont en même raiſon, mais la proportion eſt troublée; c'eſt-à-dire que *A. B* :: *E. F*, & *B. C* :: *D. E*. Il faut démontrer que *A. C* :: *D. F*.

La raiſon de *A* à *C* eſt compoſée de celles de *A* à *B*, & de *B* à *C*. Celle auſſi de *D* à *F* eſt compoſée de celles de *D* à *E* & de *E* à *F*. Or ces deux raiſons le ſont de raiſons égales: car *A. B* :: *E. F*; & *B C* :: *D. E*; par conſéquent les compoſantes étant égales, les compoſées ſont égales. Ainſi *A. C* :: *D. F*; ce qu'il falloit démontrer.

SECTION V.

De la comparaiſon des Raiſons.

Eclairciſſement touchant la grandeur ou la petiteſſe d'une Raiſon.

LEs raiſons ſont des comparaiſons. La raiſon de *A* à *B*, c'eſt le rapport de *A* à *B*: Or on peut comparer ces raiſons, par exemple la raiſon de *A* à *B*, avec la raiſon de *C* à *D*, leſquelles raiſons ſe pourront marquer ainſi, $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$. Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, c'eſt-à-dire, ſi ces deux raiſons ſont égales, c'eſt une proportion, ou une égalité de raiſons. Nous parlerons dans cette Section, de l'inégalité des raiſons. Le ſigne de cette inégalité, c'eſt $>$ ou $<$. Lors

que l'ouverture de ce ſigne eſt de la droite à la gauche, cela marque que la raiſon eſt plus grande. Ainſi ſi $\frac{M}{N} > \frac{P}{Q}$, que la raiſon de M à N eſt plus grande que celle de P à Q. Si l'ouverture du ſigne de l'inégalité eſt de la gauche vers la droite, cela marque que la raiſon eſt plus petite. Si $\frac{M}{N} < \frac{P}{Q}$, que la raiſon de M à N eſt plus petite que celle de P à Q.

Il faut d'abord examiner ce qui fait qu'une raiſon eſt plus grande, ou plus petite. Ces mots de grand & de petit, ſont relatifs. Une plus grande raiſon, c'eſt quand la choſe qu'on compare, par rapport au terme de la comparaiſon, eſt plus grande. La raiſon eſt plus petite, ſi cette choſe qu'on compare eſt plus petite, par rapport au terme de la comparaiſon.

L'idée la plus nette & la plus préciſe de la grandeur, & de la petiteſſe, c'eſt que ce qui eſt plus grand contient ce qui eſt plus petit: & plus il le contient de fois, plus il eſt grand. Ce qui eſt contenu eſt d'autant plus petit, qu'il eſt contenu plus de fois. En diviſant l'antécédent d'une raiſon par le conſéquent, le quotient de la diviſion qui expoſe comment ou combien de fois l'un eſt dans l'autre, eſt l'expoſant de cette raiſon, duquel par conſéquent dépend ſa grandeur ou ſa petiteſſe. Quand cet expoſant eſt plus grand, la raiſon eſt plus grande. Mais il faut qu'alors l'antécédent contienne ſon conſéquent, ou ſoit plus grand. Car, comme je le viens de remarquer, plus une grandeur contient celle avec qui on la compare, plus elle eſt grande. Mais ſi au contraire elle étoit contenue, alors plus l'expoſant ſeroit petit, l'antécé-

dent

dent ſeroit plus grand, ou moins petit; car moins une grandeur eſt contenue, plus elle eſt grande. Lorſque, dis-je, l'antécédent eſt plus grand, ou qu'il contient plus de fois ſon conſéquent, l'expoſant de la raiſon étant plus grand, la raiſon eſt plus grande: & ſi l'antécédent eſt plus petit que le conſéquent, ou s'il eſt contenu dans le conſéquent, l'expoſant de la raiſon étant plus grand, la raiſon eſt plus petite.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

Faire que deux differentes raiſons ayent le même conſéquent. 89

Soient ces deux differentes raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$.

Pour faire qu'elles ayent le même conſéquent, je les multiplie, l'antécédent & le conſéquent de la premiere par le conſéquent de la ſeconde; ce qui produit $\frac{ad}{bd}$. Je multiplie de même l'antécédent de la ſeconde raiſon, & ſon conſéquent par le conſéquent de la premiere; ce qui produit $\frac{bc}{bd}$. Ainſi les deux raiſons propoſées ſont réduites à celles-ci, $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$. Ces deux raiſons ont le même conſéquent, & cependant conſervent toujours le même rapport de l'antécédent à ſon conſéquent *.

PROPOSITION II.

THEOREME I.

Deux raiſons qui ont un même conſéquent, ſont entre elles comme leurs antécédens. 90

* *ſup. n.* 54.

Soient les deux raiſons de A à X, & de B à X, qui ont un même conſéquent X. Il faut démontrer qu'elles ſont l'une à l'autre, comme les antécédens A & B. Je diviſe A & B par X, & ces deux ſe trouveront ainſi exprimées; la premiere ſera $\frac{A}{X}$ & la ſeconde $\frac{B}{X}$. Or* A & B étant diviſez par un même diviſeur X, les quotiens $\frac{A}{X}$ & $\frac{B}{X}$ ſont entre eux comme A & B; ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

En réduiſant ainſi ces deux raiſons $\frac{5}{10}$ *&* $\frac{2}{12}$ *à celles-ci, qui ont un même conſéquent* $\frac{60}{120}$ *&* $\frac{20}{120}$, *on voit quelle raiſon elles ont entre elles, que* 5 *au regard de* 10, *a une plus grande raiſon, que* 2 *au regard de* 12. *Cela feroit douter qu'il fût vrai que la raiſon eſt plus grande, quand l'expoſant eſt plus grand; car diviſant* 10 *par* 2 *le quotient eſt* 5, *qui eſt plus petit que* 6, *le quotient de* 12 *diviſé par* 2. *Mais il faut ſe ſouvenir de ce qu'on vient de voir, que quand les antécédens ſont plus petits que leurs conſéquens; moins l'expoſant eſt grand, la raiſon eſt plus grande.* 60 *n'eſt contenu que deux fois dans* 120, *& par conſéquent plus grand que* 20, *qui eſt contenu ſix fois.*

PROPOSITION III.

THEOREME II.

91 *Si deux grandeurs ſont inégales, la plus grande a une plus grande raiſon à une même grandeur, que la plus petite, & plus grande raiſon à la plus petite, qu'à la plus grande.* Eucl. V. Prop. 8.

Soient

* *ſup. n* 55.

Soient deux grandeurs inégales *A* & *B*. La plus grande eſt *A*, & *C* une troiſieme, telle qu'elle ſoit. Il faut démontrer 1°. que la raiſon de *A* à *C*, eſt plus grande que celle de *B* à *C*. J'exprime ainſi ces deux raiſons

$\frac{A}{C}$ & $\frac{B}{C}$, ou $\frac{AB}{C.}$ Elles ont un même conſéquent; ainſi, ſelon la Propoſition précédente, elles ſont comme *A* & *B*. Or *A* eſt plus grand que *B*: donc $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$.

2°. Il faut démontrer que la raiſon de *C* à *B* eſt plus grande, que celle de *C* à *A*, que $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$. Je donne à ces deux raiſons le même conſéquent *, les réduiſant ainſi $\frac{ACBC}{AB}$. La raiſon $\frac{AC}{AB}$ eſt donc la même que $\frac{C}{B}$; & la raiſon $\frac{BC}{AB}$, la même que $\frac{C}{A}$ †. Or ces deux raiſons $\frac{AC}{AB}$ & $\frac{BC}{AB}$ ſont entre elles ‡, comme *A* eſt à *B*. Mais *A*, ſelon la Propoſition, eſt plus grand que *B*: donc la raiſon de *C* à *B* eſt plus grande, que celle de *C* à *A*; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

THEOREME III.

De deux grandeurs, celle qui a une plus grande raiſon à une même, eſt la plus grande; & au contrai- 92

* *ſup. n.* 89. † *ſup. n.* 54. ‡ *ſup. n.* 90. & 54.

traire, celle à laquelle une même a plus grande raiſon, eſt la plus petite. Eucl. V. Prop. 10.

Soient A & B deux grandeurs inégales. A a une plus grande raiſon avec C, que B avec C; ainſi $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ & $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$. Je dis que $A > B$; ce qu'il faut démontrer. 1°. On ſuppoſe donc $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$. Or* ces deux raiſons ſont comme A & B. Il faut donc que $A > B$. 2°. Si $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$ il faut démontrer que B eſt plus petit que A. Ayant réduit ces deux raiſons au même conſéquent $\frac{C}{B}$ à $\frac{CA}{BA}$ & $\frac{C}{A}$ à $\frac{CB}{BA}$, ſelon qu'on le ſuppoſe, il faut que $\frac{CA}{BA} > \frac{CB}{BA}$. Or ces deux raiſons ſont comme A & B †; il faut donc que A ſoit plus grand, & B plus petit.

PROPOSITION V.

93 *Si la premiere eſt à la ſeconde comme la troiſieme à la quatrieme, & que la troiſieme ait une plus grande raiſon à la quatrieme, que la cinquieme à la ſixieme; auſſi la premiere aura une plus grande raiſon à la ſeconde, que la cinquieme à la ſixieme.* Eucl. V. Prop. 13.

Soient ces ſix grandeurs, A, B, C, D, E, F, dont les quatre premieres ſont en proportion. $A. B :: C. D$, ou $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Il faut démontrer que ſi $\frac{C}{D} > \frac{E}{F}$, la raiſon $\frac{A}{B}$ ſera auſſi

* *ſup.* n. 90. † *ſup.* n. 90.

auſſi plus grande, que la raiſon $\frac{E}{F}$. Puiſque $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$ ſont une même raiſon; $\frac{C}{D}$ étant plus grande que $\frac{E}{F}$, il faut que $\frac{A}{B}$ ſoit auſſi plus grand que $\frac{E}{F}$.

PROPOSITION VI.

Si la premiere eſt à la ſeconde comme la troiſieme à la quatrieme, & que la premiere ſoit plus grande que la troiſieme; auſſi la ſeconde ſera plus grande que la quatrieme; & ſi égale, égale; ſi plus petite, plus petite. Euclid. V. Prop. 14. 94

Soit cette proportion *A. B :: C. D.* Il faut démontrer que ſi $A = C$, de même $B = D$; & que ſi $A > C$, de même $B > D$; & enfin ſi $A < C$, de même $B < D$.

Alternando A. C :: B. D; ce qui ne ſeroit pas, ſi comme $A = C$, de même B n'étoit pas égal à D; ou ſi A étant plus grand que C, B n'étoit pas plus grand que D; ou ſi A étant plus petit que C, le terme B n'étoit pas auſſi plus petit que D.

PROPOSITION VII.

Si trois grandeurs d'un côté & trois d'un autre étant priſes de deux en deux ſont en même raiſon, & qu'en raiſon égale la premiere ſoit plus grande que la troiſieme; auſſi la quatrieme ſera plus grande que la ſixieme; & ſi égale, égale; ſi plus petite, plus petite. Eucl. V. Prop. 20. 95

Soient A, B, C d'une part, & D, E, F d'autre. Soient *A B :: D. E* & *B. C :: E. F*. Si $A > C$; je dis que $D > F$. Si $A < C$, que $D < F$. Si $A = C$, que $D = F$; autrement

ne ſeroit pas à C, comme D eſt à F, ainſi qu'on le ſuppoſe, s'il étoit ou plus grand ou plus petit: car deux grandeurs inégales ne peuvent pas contenir de la même maniere une troiſieme grandeur, ou y être contenues.

PROPOSITION VIII.

96 *Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, priſes de deux en deux, ſont en même raiſon, leur proportion étant ſans ordre; & qu'en raiſon égale la premiere ſoit plus grande que la troiſieme: auſſi la quatrieme ſera plus grande que la ſixieme; & ſi égale, égale; ſi plus petite, plus petite.* Eucl. V. Prop. 21.

Soient A, B, C & D, E, F. Si $A.B :: E.F$, & $B.C :: D.E$, & que A ſoit plus grand que C; je dis que D ſera plus grand que F; ſi égal, égal; ſi plus petit, plus petit: car C, ayant été poſé plus petit que A, la raiſon de C à B eſt plus petite, que celle de A à B *: donc puiſque $B.C :: D.E$, & *permutando* $C.B :: E.D$, la raiſon de E à D eſt plus petite que celle de A à B, ou que celle de E à F, qui eſt la même. D eſt donc plus grand que F †; le reſte eſt aiſé.

PROPOSITION IX.

97 *Si quatre grandeurs ſont en proportion, la plus grande jointe avec la plus petite, ſera plus grande que les deux autres enſemble.* Eucl. V. Prop. 25.

Soient ces quatre grandeurs en proportion $A.B :: C.D$. Je ſuppoſe A la plus grande & D la plus petite, & je dis que $A + D > B + C$.

Soit X l'excès de A par deſſus B, & Z l'excès de C par deſſus D; ainſi $A = X + B$, & $C = Z + D$. Je mets donc ces nouvelles valeurs en pla-

* *ſup. n.* 91. † *ſup. n.* 92.

place de A & de C, & j'ai cette proportion $X + B . B :: X + D . D$, qui eſt la même que la précédente. Il faut donc démontrer $X + B + D > B + Z + D$. J'en retranche de part & d'autre la grandeur $B + D$; ainſi il ne reſte plus qu'à démontrer $X > Z$.

Puiſque X eſt la difference de A à B, & Z celle de C à D, $A - B = X$ & $C - D = Z$. Or $A - B . B :: C - D . D$ [a]. Mettant donc X & Z en place de leurs égales, $A - B$ & $C - D$, on aura $X . B :: Z . D$ ou *alternando* [b] $X . Z :: B . D$, & $B . D :: A . C$, ſuivant la ſuppoſition. Ainſi A étant plus grand que C, auſſi $X > Z$; ce qui reſtoit à prouver.

Proposition X.

Les grandeurs faites de grandeurs égales & inégales, ſont entre elles comme les inégales. 98

Soient ces deux grandeurs ab & ac, on peut concevoir qu'elles ſont faites de b & de c multipliez par a; ainſi $ab . ac :: b . c$ [c], de même $abd . acd :: b . c$.

Corollaire.

Ainſi les triangles & les parallelogrammes de même hauteur ſont l'un à l'autre comme leurs baſes. Eucl. VI. Prop. 1. 99

Les grandeurs des triangles & des parallelogrammes [d] dépendent de leur hauteur & de leurs baſes; donc ſi la hauteur eſt la même, ils ſeront comme leurs baſes.

a *ſup. n.* 51. b *ſup. n.* 46. c *ſup. n.* 94.
d *L.* 2. *n.* 130. & 135.

ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DE L'ETENDUE.

LIVRE QUATRIEME.

Des raiſons & proportions des Lignes, des Triangles, des Figures, tant de leurs côtez & circuit, que de leurs ſurfaces.

SECTION PREMIERE.

Méthode pour trouver & démontrer les raiſons & les proportions des Lignes.

AVERTISSEMENT.

SELON *la notion qu'on a donnée des raiſons & des proportions, il eſt évident que pour démontrer que quatre Lignes ſont en proportion, il faut faire voir que ſi on les diviſoit en deux, ou en trois, ou en tant de parties qu'en voudra; ſi cha-*

chaque partie de la premiere étoit égale à chaque partie de la ſeconde, chaque partie de la troiſieme ſeroit auſſi égale à chaque partie de la quatrieme; ſi les parties de la premiere étoient plus grande que celles de la ſeconde, celles de la troiſieme ſeroient plus grandes que celles de la quatrieme; ſi plus petites, plus petites; & que ſi chaque partie de la premiere ne ſe trouvoit pas tant de fois dans la ſeconde, chaque partie de la troiſieme ne ſe trouveroit pas exactement tant de fois dans la quatrieme. Enfin, que s'il y avoit excès ou défaut, en diviſant la premiere & la ſeconde l'une par l'autre, il y auroit excès ou défaut, en diviſant la troiſieme & la quatrieme l'une par l'autre. C'eſt la méthode la plus naturelle, puiſque raiſon n'eſt que la maniere de contenir, & d'être contenu; & l'on ne ſauroit prouver plus ſenſiblement qu'une premiere Ligne eſt contenue dans une ſeconde, comme une troiſie ne dans une quatrieme, qu'en prouvant de ces quatre Lignes ce que nous venons de dire. C'eſt la méthode qu'on va ſuivre.

DEFINITION.

On appelle Eſpace parallele, celui qui eſt compris entre deux lignes paralleles. 1

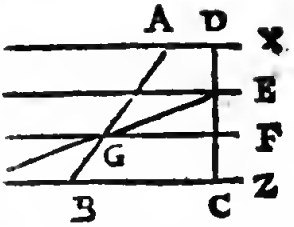
X & *Z* étant deux lignes paralleles, l'eſpace qu'elles renferment ſe nomme eſpace parallele.

LEMME PREMIER.

Si l'on coupe un eſpace parallele, ou la perpendiculaire qui le meſure, par des lignes paralleles; les lignes obliques compriſes dans cet eſpace ſeront partagées en autant de parties, que la perpendiculaire. 2

X & *Z* deux paralleles renferment l'eſpace, que la perpendiculaire *DC* meſure. La ligne

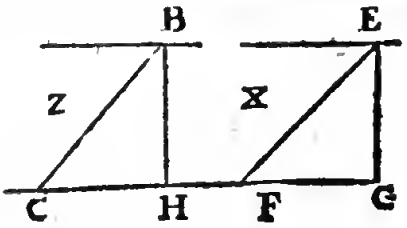
AB eſt une oblique, compriſe dans cet eſpace, ſi on diviſe *DC* en trois parties, menant les deux paralleles *E* & *F*; je dis que ces deux paralleles couperont auſſi en trois parties l'oblique *AB*. Ces deux paralleles *E* & *F* diviſant tout l'eſpace parallele, compris entre *X* & *Z*, en trois autres eſpaces paralleles, dans leſquels ſe trouve l'oblique *AB*, auſſi-bien que *DC*. Ainſi elle eſt diviſée en autant de parties, que la perpendiculaire *DC*; ce qu'il falloit prouver.



Lemme II.

3 *Les lignes obliques, qui dans des eſpaces paraleles égaux ſont les mêmes angles, ſont égales, & également obliques.*

Soient *Z* & *X* deux eſpaces paralleles égaux, où les lignes obliques *BC* & *EF* font les angles *BCH* & *EFG* égaux; je dis que ces deux lignes ſont égales, & également obliques. Des points *B* & *E*, je mene perpendiculairement les lignes *BH* & *EG*, leſquelles ſont égales*; ainſi les triangles *BCH*, *EFG* ſont rectangles & entierement égaux †; & partant *BC* & *EF* ſont des lignes égales: comme auſſi *CH* & *FG*; par conſéquent ‡ *BC* & *EF* ſont également obliques; ce qu'il falloit prouver.



Lemme III.

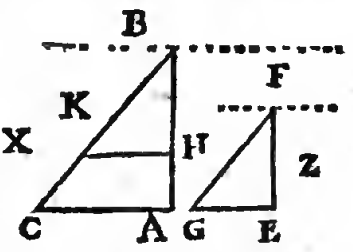
4 *Les lignes obliques qui font les mêmes angles dans*

* *L.* 1. *n.* 65. † *L.* 2. *n.* 96. ‡ *L.* 1. *n.* 55.

dans des eſpaces paralleles inégaux, ſont inégales; plus grandes, ſi l'eſpace eſt plus grand; plus petites, ſi l'eſpace eſt plus petit.

Les lignes *BC* & *FG* obliques dans les eſpaces *X* & *Z*, ſont les mêmes angles. La perpendiculaire *AB* eſt plus grande que *EF*; ainſi l'eſpace *X* eſt plus grand que l'eſpace *Z*: il faut démontrer que l'oblique *FG* eſt plus petite que l'oblique *BC*.

Soit pris ſur *BA* la partie *BH* égale à *EF*, & par *H* ſoit menée une parallele à la baſe *AC*; les deux triangles *ABC* & *EFG* étant rectangles & l'angle *BCA* étant égal à *FGE*, comme on le ſuppoſe, ils ſont équiangles [a]. L'angle *BKH* eſt égal à *BCA*, & *BHK* à *BAC* [b]. Ainſi le triangle *BKH* eſt équiangle avec *BAC*; & partant avec *FGE*. On ſuppoſe *FE* égal à *BH*; donc *FG* = *BK* [c]. Or *BK* eſt partie de *BC*; donc *FG* égale à *BK* eſt auſſi partie de *BC*, & par conſéquent plus petite; ce qu'il falloit démontrer.



THEOREME I.

Ayant partagé un eſpace parallele par deux ou pluſieurs paralleles, la perpendiculaire de cet eſpace & la ligne oblique qui y ſera, ſeront coupées proportionnellement.

1°. La ligne oblique ſera coupée en autant de parties que la perpendiculaire, par le Lemme premier [d]. Si par exemple, la perpendiculaire eſt coupée en cent parties, l'oblique ſera auſſi coupée en cent parties.

2°. Si les parties de la perpendiculaire ſont éga-

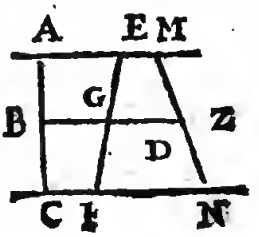
a *L.* 2. *n.* 10. b *L.* 2. *n.* 27. c *L.* 2. *n.* 96. d *ſup. n.* 2.

égales entre elles, celles de l'oblique ſeront égales entre elles, par le Lemme ſecond *: car ces obliques ſont les mêmes angles ſur ces paralleles †; ainſi elles ſont égales & également obliques, ſelon ce Lemme. Si les cent parties dans leſquelles la perpendiculaire a été coupée ſont toutes égales, les cent parties de l'oblique ſeront donc auſſi toutes égales.

3°. Si les parties de la perpendiculaire ſont inégales, celles de l'oblique, ſelon le troiſieme Lemme, ſont auſſi inégales. D'où il ſuit, que ſi on prend cent parties égales dans la perpendiculaire, & qu'il reſte une partie qui ſoit ou plus petite ou plus grande, l'oblique ſe trouvera diviſée, de ſorte qu'après les cent parties égales, il y aura un reſte plus petit, ſi le reſte de la perpendiculaire eſt plus petit; plus grand, ſi le reſte de la perpendiculaire eſt plus grand, comme on l'a prouvé dans le Lemme troiſieme. Partant comme la toute ſera contenue, ou contiendra la toute, les parties ſeront contenues ou contiendront les parties. Ainſi, ſelon la notion des proportions, les deux lignes dont il eſt queſtion ſont coupées proportionnellement.

THEOREME II.

6 *Pluſieurs lignes obliques étant dans un même eſpace parallele, ſi on coupe cet eſpace par une ligne parallele, ces lignes ſeront coupées proportionnellement.*



Les lignes obliques *EF* & *MN* ſont entre deux paralleles, entre leſquelles *AC* eſt perpendiculaire. Cet eſpace eſt partagé par *Z* une parallele: donc par le Théoreme

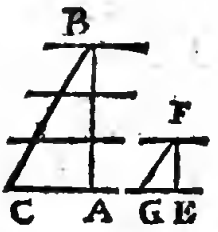
* *Sup. n. 3.* † *L. 2. n. 23.*

me précédent *MN. AC* :: *MD. AB*. & de même *EF. AC* :: *EG. AB* Et *alternando MN. MD* :: *AC. AB* :: *EF. EG* Donc *MN. MD* :: *EF. EG*. Et *permutando*, *MN. EF* :: *MD. EG*; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME III.

Les lignes obliques qui font les mêmes angles dans des espaces paralleles differens, sont entre elles comme ces espaces. 7

Les lignes *BC* & *FG* obliques font les angles *BCA* & *FGE* égaux; par conséquent si *AB* est égal à *EF*, par le Lemme second [a] *BC* = *FG*.



Si *AB* est plus grand que *EF* par le Lemme troisième [b] *BC* sera plus grand que *FG*.

Si *AB* est par exemple triple de *EF*, alors *BC* sera triple de *FG*: car supposant que *BA* est partagé en trois parties égales; par le Lemme premier [c] *BC* sera aussi partagé en trois parties, lesquelles par le Lemme second [d] seront chacune égale à *GF*; car ces parties sont les mêmes angles [e]: ainsi elles sont également obliques: ainsi *BC* est triple de *FG*, comme nous venons de le démontrer.

Par cette méthode on démontrera que telle partie que *EF* est de *AB*, l'oblique *FG* est partie de l'oblique *BC*; ou que comme *EF* sera contenue en *AB*, aussi *FG* sera contenue en *BC*.

Si *AB* est égal, ou contient une ou plusieurs fois *EF*, plus quelque reste, on démontrera que *BC* est égal ou contient de la même maniere une ou plusieurs fois exactement *FG*, plus quel-

a *sup. n.* 3. b *sup. n.* 4. c *sup. n.* 2. d *sup. n.* 3. e *L.* 2. *n.* 27.

quelque reſte. Ainſi les lignes également obliques, &c. ce qu'il falloit démontrer.

SECTION II.

Des Raiſons & Proportions des côtez des Triangles.

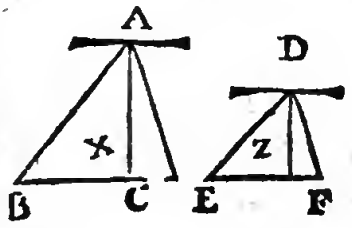
DEFINITION I.

8 DEUX *Triangles ſont dits ſemblables, lorſque leurs côtez ſont des angles égaux, ou qu'ils ſont équiangles.*

DEFINITION II.

9 *Dans les Triangles ſemblables que l'on compare, les côtez oppoſez aux angles égaux ſont nommez, Côtez Homologues.*

X & *Z* ſont des triangles ſemblables ou équiangles, chacun de leurs côtez, comme *AB* & *DE* oppoſez aux angles égaux *C* & *F*, ſont nommez Homologues, c'eſt-à-dire, proportionnels. On va démontrer, que ce nom leur convient.



THEOREME I.

10 *Deux Triangles ſemblables ont leurs côtez proportionnels.* Eucl. VI. Prop. 4.

Je mene par le ſommet des deux triangles *ABC* & *DEF* des lignes paralleles à leurs baſes, & de leur ſommet j'abaiſſe ſur ces baſes les perpendiculaires *X* & *Z*. *Fig. précédente.*

Les angles *ABC* & *DEF* ſont égaux; les obliques

ques *AC* & *DF* ſont auſſi les mêmes angles: Donc *AB. DE* :: *X. Z* :: *AC. DF* [a].

Ainſi *AB. DE* :: *AC. DF.* En menant par *B* & *E* des lignes paralleles aux côtez *AC* & *DF*, on démontrera de la même maniere que *AB. DE* :: *BC. EF*, & qu'ainſi deux triangles ſemblables ont tous leurs côtez proportionnels.

C'eſt pour cette raiſon qu'on appelle Homologues, les côtez qui ſe répondent dans les figures ſemblables; parce que ces côtez ſont proportionnels les uns aux autres, ou qu'ils ont même raiſon; ce que ſignifie ce mot Homologue.

THEOREME II.

Deux triangles ſemblables à un troiſieme ſont ſemblables entre eux. Eucl. VI. Prop. 21. 11

Soient *A*, *B*, *C* trois triangles. Si *A* & *C* ſont ſemblables à *B*, les angles de *B* ſont égaux à ceux de *A* & de *C*: Donc les angles de *A* & de *C* ſont auſſi égaux les uns aux autres [b]. Ainſi, ſelon la premiere Definition [c], *A* & *C* ſont ſemblables.

THEOREME III.

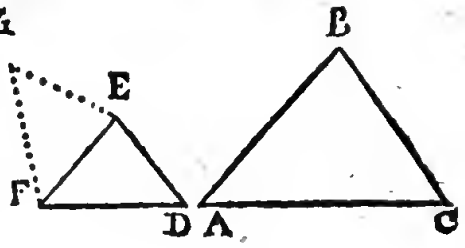
Si deux triangles ont leurs côtez proportionnels, ils ſeront ſemblables. Eucl. VI. Prop. 5. 12

Les côtez des deux triangles *ABC* & *DEF* ſont tels, que *AB. BC* :: *FE. ED*, & *AC. AB* :: *DF. EF.* Je dis que ces deux triangles ſont ſemblables.

Je fais ſur *EF* l'angle *GEF* égal à *ABC*, & l'angle *EFG* égal à *BAC*; ainſi *EGF* eſt égal à *ACB* [d]. Par conſéquent *EFG* & *ABC* ſont deux triangles ſemblables [e]. Ainſi il ne s'agit plus

a *ſup. n.* 7. b *L.* 3. *n.* 52. c *ſup. n.* 8. d *L.* 2. *n.* 80. e *ſup. n.* 8.

plus que de montrer que les deux triangles *EFG* & *EFD* ſont égaux; & qu'ainſi *EFD*, le même que *EFG*, eſt ſemblable à *ABC*.



Puiſque *EFG* & *ABC* ſont ſemblables, donc *AB. BC:: EF. EG.* Par la ſuppoſition, *AB. BC:: EF. ED*: donc *EG* & *ED*, qui ont une même raiſon avec *EF*, ſont égaux [a]. On démontrera de la même maniere que tous les côtez de *EFG*, ſont égaux à ceux de *EFD*; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME IV.

13 *Deux triangles ſont ſemblables, lorſqu'ils ont un angle égal, & les côtez qui comprennent cet angle proportionnels.* Eucl. VI. Prop. 6. *même figure.*

L'angle *FED* eſt égal à *ABC* & *AB. BC:: FE. ED*; je dis que *ABC* & *FED* ſont entierement ſemblables. Pour le prouver, je fais comme ci-deſſus le triangle *EFG* ſemblable à *ABC*, & je montre en la même maniere, que les triangles *EFG* & *DEF* ont égaux: car *AB. BC:: EF. EG:: EF. ED.* Ainſi *EG* & *ED* ont une même raiſon avec *EF*: donc ils ſont égaux [b]. Or puiſque l'angle *DEF* eſt ſuppoſé égal à l'angle *ABC*: donc il l'eſt à *FEG*, qu'on a fait égal à *ABC*. Ainſi ces deux triangles *DEF* & *GEF*, ayant deux côtez égaux *EG* à *ED*, & *EF* à *EF*, & les angles *FED* & *GEF* que ces côtez comprennent, égaux, ils ſont égaux [c]. Donc puiſque *DEF* & *CBA* ſont ſemblables à *EGF*, ils ſont ſemblables entre eux [d].

THEO-

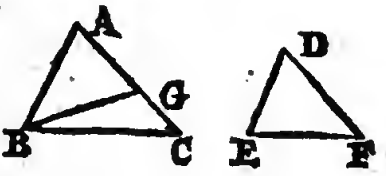
a *L.* 3. *n.* 52. b *L.* 2. *n.* 52. c *L.* 2. *n.* 58. d *ſup. n.* 11.

THEOREME V.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtez au long d'un autre proportionnels, les troiſiemes angles étant de même eſpece, c'eſt-à-dire, ou aigus, ou droits, ou obtus, ces deux triangles ſont équiangles; & les angles, dont les côtez ſont proportionnels, ſont égaux. Eucl. VI. Prop. 7. 14

Soient ces deux triangles *ABC* & *DEF*, l'angle *A* eſt égal à l'angle *D*, & les côtez qui comprennent un autre angle proportionnels; je dis que, ſi *C* & *F* ſont de même eſpece, ces deux triangles ſont équiangles; & les angles, dont les côtez ſont proportionnels, égaux.

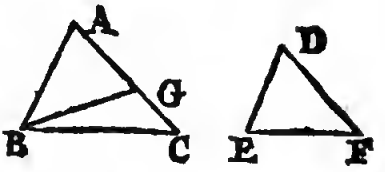
Que *C* & *F* ſoient 1°, aigus; je dis que ces triangles ſont équiangles, ſavoir que les angles *B* & *E* ſont égaux, comme *C* & *F*.



Si *B* eſt égal à *E*, ces triangles, ſelon la Propoſition précédente, ſont équiangles. Mais ſi *B* eſt plus grand que *E*, ſoit fait *ABG* égal à *DEF* [a], dont le troiſieme angle *AGB* ſera égal au troiſieme angle *F* [b], & partant aigu comme lui; & *ABG* & *DEF* ſeront équiangles, & ſemblables: ainſi *AB. BG:: DE. EF.* Or on ſuppoſe que *DE. EF:: AB. BC.* Ainſi *AB. BG :: DE. EF:: AB. BC*: donc *BC* & *BG* ayant une même raiſon avec *AB*, ſont égaux [c]: ainſi le triangle *GBC* eſt iſoſcele, & par conſéquent les angles *BCG* & *BGC* ſeront aigus [d], & par conſéquent *BGA* ſera plus grand qu'un droit [e]. Mais l'angle *AGB* a été démontré égal à l'angle *F*,

a *L.* 2. *n.* 29. b *L.* 2. *n.* 76. c *L.* 3. *n.* 32.
d *L.* 2. *n.* 84. e *L.* 2. *n.* 17.

F, qu'on a ſuppoſé aigu; ainſi il ſeroit en même tems plus grand & plus petit qu'un droit; ce qui eſt abſurde.

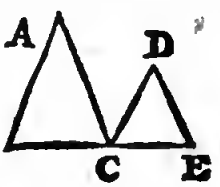


Que *C* & *F* ne ſoient pas aigus: donc *BGC* égal à *C* ne ſera pas aigu; ce qui ne peut pas être [a]. Par conſéquent les angles *ABC* & *E* ſont néceſſairement égaux; ainſi *ABC* & *DEF* ſont entierement équiangles [b]. Donc ſi dans les deux triangles, &c.

THEOREME VI.

15 *Si deux triangles ſemblables ont un point commun, & les côtez homologues paralleles, les deux autres côtez ſe rencontrent directement.* Eucl. VI. Prop. 32.

Soient ces deux triangles ſemblables *ABC*, *DCE*, qui ont un point commun, ſavoir *C*; les côtez *AB* & *DC* ſont paralleles, comme auſſi *AC* & *DE*; je dis que *BC* + *CE* eſt une ligne droite.



Puiſque *AB* & *DC* ſont paralleles, l'angle *BAC* = *ACD* [c], & l'angle *ABC* = *DCE* par la ſuppoſition; donc les trois angles *ACB*, *ACD*, *DCE* ſont égaux aux trois angles *ACB*, *CAB*, *ABC* du triangle *ABC*, leſquels valent enſemble deux droits [d]: donc *BCE* eſt une ligne droite [c].

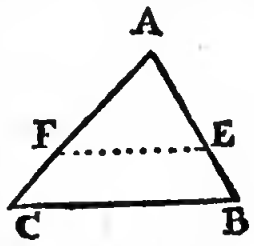
THEOREME VII.

16 *Lorſqu'on coupe deux côtez d'un triangle par une ligne parallele à la baſe de l'angle qu'ils com-*

a L. 2. n. 84. b L. 2. n. 80. c L. 2. n. 25.
d L. 2. n. 75. e L. 2. n. 80.

comprennent, ils ſont coupez proportionnellement. Eucl. VI. Prop. 2.

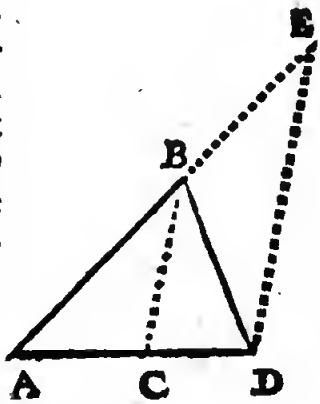
Soit le triangle *ABC*, je mene *EF* parallele à *BC*, je dis que *AE. EB :: AF. FC.* Le triangle *AEF* eſt ſemblable au triangle *ABC*, puiſqu'ils ſont équiangles [a]: car outre que l'angle *A* eſt commun, l'angle *AEF* = *ABC*, & l'angle *AFE* = *ACB* [b]: donc *AB. AE :: AC. AF* [c] & *dividendo* [d] *AB — AE. AE :: AC — AF. AF.* Or *AB — AE* = *EB*, & *AC — AF* = *FC*. Donc *EB. AE :: FC. AF.* Permutando, *AE. EB :: AF. FC.*



THEOREME VIII.

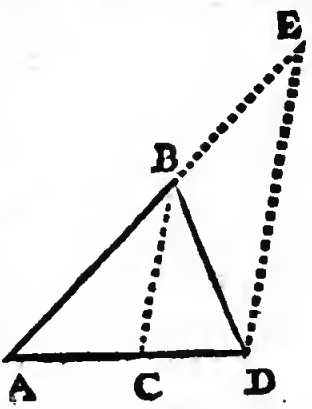
Si l'angle d'un triangle eſt coupé en deux également par une ligne droite, qui coupe auſſi la baſe, les ſegmens de la baſe ſeront l'un à l'autre comme les deux autres côtez. Et ſi cela eſt, la ligne tirée du ſommet à la baſe coupe l'angle en deux également. Eucl. VI. Prop. 3. 17

Soit le triangle *ABD*. La ligne *BC* tirée du ſommet, coupe l'angle *B* en deux également. Il faut prouver, 1°. que *AB. BD :: AC. CD.* Soit mené *DE* parallele à *BC*, & prolongez le côté *AB* juſqu'à ce qu'il rencontre cette parallele. Les angles *ABC* & *AED* ſont égaux [e] & par la même raiſon *CBD* & *BDE* [f]. On ſuppoſe *ABC* & *CBD* égaux: donc *CBD* & *BED* ſeront



a *ſup. n.* 8. b *L.* 1. *n* 27. c *ſup. n.* 10. d *L.* 3. *n.* 51. e *L.* 2. *n.* 27. f *L.* 2. *n.* 23.

ront auſſi égaux, & par conſéquent *BDE* & *BED*: ainſi le triangle *DBE*, étant iſoſcele, *BD* = *BE*. Or *AB*. *AC* :: *BE* (ou *BD*) *CD* [a]. Donc *AB*. *AC* :: *BD* *CD*. & alternando *AB*.*BD*::*AC*. *CD*.

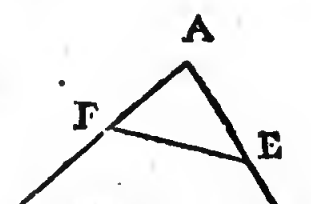


2°. Il faut prouver que ſi cela eſt, *BC* coupe *ABD* par la moitié. Puiſque ſuppoſant comme deſſus *DE* parallele à *BC*. & *AB* prolongée en *E*, alors *AB*. *BE* :: *AC*. *CD* [b], & par l'hypotheſe *AB*. *BD* :: *AC*. *CD*: donc *BE* = *BD* [c], & le triangle *DBE* ſera iſoſcele [d] & aura les angles *BED* = *BDE* [e]; mais à cauſe des paralleles *BC*, *ED*, les angles *ABC*, *BED* ou ſon égal *BDE* ſeront égaux [f], comme auſſi *CBD*, *BDE* [g]: donc l'angle *ABC* = *CBD*; ce qu'il falloit prouver.

DEFINITION I.

18 *Les lignes antiparalleles ſont celles qui ſur les lignes qu'elles coupent font bien les mêmes angles, mais c'eſt d'un autre côté.*

Les lignes paralleles font les mêmes angles d'un même côté, avec les lignes qu'elles coupent [h]. Si *AFE* = *ABC*, les lignes *FE* & *BC* ſeroient ainſi paralleles; mais ſi *AFE* = *ACB*, ces lignes ſont antiparalleles.



THEO-

a *ſup.* n. 16. b *ſup.* n. 16. c *L.* 3. n. 52.
d *L.* 2. n 57. e *L.* 2. n. 83. f *L.* 2. n. 27.
g *L.* 2. n. 25. h *L.* 2. n. 27.

THEOREME IX.

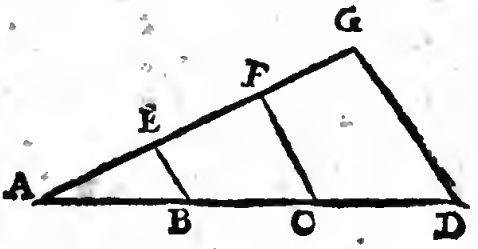
Lorſqu'on coupe les côtez d'un triangle par une ligne antiparallele à ſa baſe, les côtez de ce triangle ſont coupez en proportion réciproque. 19
Même Figure.

FE eſt antiparallele à *BC*: ainſi $AFE = ACB$, & $AEF = ABC$. Le triangle *AEF* a donc les mêmes angles que *ABC*, & par conſéquent ils ſont ſemblables, & leurs côtez ſont proportionnels *; mais leurs côtez homologues n'ont pas la même ſituation, car *AB* n'eſt pas homologue avec *AF*, mais avec *AE*: ainſi ces côtez *AB* & *AC* ne ſont pas coupez dans une proportion droite. *AB* n'eſt pas à *AF* comme *AC* à *AE*; de ſorte que de ces quatre grandeurs, la premiere eſt à la quatrieme comme la troiſieme à la ſeconde. *AB. AE :: AC AF.*

PROBLEME I.

Couper une ligne droite ſemblablement à une ligne qui eſt déja coupée. Eucl. VI. Prop. 10. 20

La ligne *AD* eſt coupée en trois parties *AB*, *BC*, *CD*: on propoſe de couper la ligne *AG* en trois parties proportionnelles à celles de *AD*. Je joins *AG* avec *AD*; de ſorte qu'elles faſſent un angle, quel qu'il ſoit. Après je mene par les points *G* & *D* une ligne droite, & à celle-ci des paralleles par les points *B* & *C* de la coupée. Les paralleles coupent *AG*, en trois parties, qui ſont proportionnelles à celles de *AD*: car † *AD. AC :: AG. AF*, & *AC. AB :: AF. AE*: ainſi on a fait ce qui étoit propoſé.



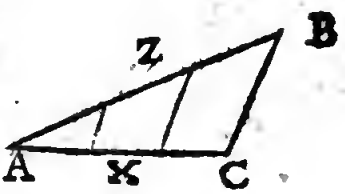
I PRO-

* *Sup. n.* 10. † *Sup. n.* 16.

PROBLEME II.

21 *Diviſer une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.*

La ligne donnée eſt *X*, qu'il faut diviſer en trois parties : je la joins avec *Z* une ligne infinie: de ſorte qu'elles faſſent l'angle *Z Â X*, n'importe de quelle grandeur. Ayant ouvert le compas au hazard, & mis une de ſes pointes ſur *A*, je marque ſur *Z* de ſuite avec la même ouverture trois parties égales : après de *B*, extrémité de ces trois parties, je mene une ligne au point *C*, extrémité de *X*; & à celle-ci, des paralleles par les diviſions de *Z*; ſelon ce qu'on vient de démontrer dans le Problême précédent, *AC* ſera diviſé ſemblablement en *AB*, c'eſt-à-dire, en trois parties.



PROBLEME III.

22 *Retrancher d'une ligne telle partie qu'on voudra.* Eucl. VI. Prop. 9.

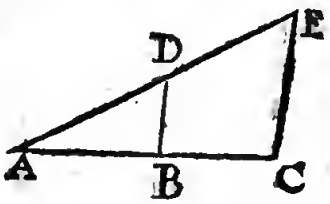
Si de *AC*, *fig. précéd.* on veut retrancher la troiſieme partie, il n'eſt queſtion que de diviſer *AC* en trois parties, ſuivant le Problême précédent, & retrancher de *AC* une de ces trois parties.

PROBLEME IV.

23 *Deux lignes étant données, trouver une troiſieme qui ſoit à la ſeconde, comme celle-là eſt à la premiere; ou à deux lignes données trouver une troiſieme proportionnelle.* Eucl. VI. Prop. 11.

La premiere ligne eſt *AB*, la ſeconde *BC*; je joins ces deux lignes de ſorte qu'elles ne faſſent qu'une ligne droite : enſuite je prens *AD* égale à *BC*, que je joins avec *AB*, de ſorte qu'el-

qu'elles faſſent un angle quel qu'il ſoit. Je mene de *D* une ligne ſur *B*, & à celle-ci une parallele par le point *C* : je prolonge *AD* juſqu'à ce qu'elle rencontre la parallele en *E*; ce qui étant fait, je dis que *DE* eſt la troiſieme proportionnelle cherchée.

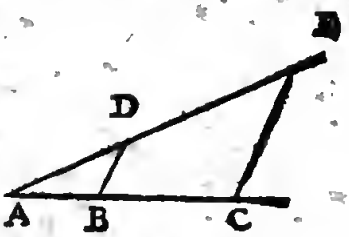


Car [a] *AB* eſt à *AD* ou à ſon égale *BC*, comme *AC* eſt à *AE*; & partant [b] comme *AC* — *AB* eſt à *AE* — *AD*, c'eſt-à-dire, comme *BC*, eſt à *DE*; ainſi ∴ *AB. BC. DE*; ce qui étoit propoſé.

Probleme V.

Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes qui ſoient en proportion. Eucl. VI. Prop. 12. 24

La premiere eſt *AB*; la ſeconde *AD*, avec leſquelles je fais l'angle quel qu'il ſoit *BAD*; la troiſieme eſt *BC* que je joins avec *AB*, de ſorte que toutes deux faſſent une ligne droite: après je mene par *B* & *D* une ligne droite, & à celle-ci par le point *C* la parallele *CE*: je prolonge *AD* juſqu'à ce qu'elle rencontre cette parallele *CE*; ce qui étant fait, je dis que *DE* eſt la quatrieme proportionnelle: car [c] *AB. AC* :: *AD. AE*; ainſi *dividendo* [d] *AB. AC* — *AB* :: *AD. AE* — *AD*; c'eſt-à-dire, que *AB. BC* :: *AD. DE*, & par conſéquent *alternando AB. AD* :: *BC. DE*.



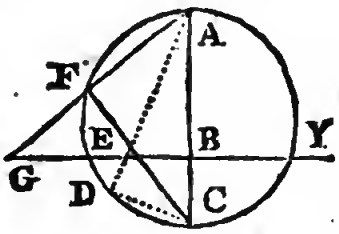
Probleme VI.

Trouver toutes les réciproques poſſibles à deux lignes données. 25

I 2 Soient

[a] *ſup. n.* 16. [b] *L.* 2. *n.* 43. [c] *ſup.* 216. [d] *L.* 2. *n.* 43.

Soient les deux lignes données *AB* & *AC*: il faut prendre *AB*, la plus petite, ſur la plus grande *AC*, & faire un cercle qui ait la plus grande pour diametre; enſuite du point *B* où la plus petite ſe termine, tirer ſur ce diametre une perpendiculaire indéfinie, comme *Y*.



Toute ligne qu'on menera de *A* qui coupera l'indéfinie, & ſe terminera au cercle comme *AD*, ou qui coupera le cercle & ſe terminera à l'indéfinie, ſatisfera au Problême. *AE* & *AD* ſont réciproques à *AB*, *AC*, comme auſſi *AF* & *AG*: car *BE* eſt antiparallele à *DC*, puiſque *AEB* = *ACD*, & *ABE* = *ADC* [a]: ainſi ces lignes ſont coupées réciproquement [b]. *AFC* = *ABG* [c] & *ACF* = *AGE* [d]: donc *BG* & *FC* ſont antiparalleles; ainſi *AC* & *AG* ſont coupées réciproquement.

Probleme VII.

26 *Sur une ligne donnée décrire une figure ſemblable à une figure donnée.* Eucl. VI. Prop. 18.

Il n'eſt queſtion que de réduire cette figure donnée en triangles [e], & ſur la ligne donnée mener des lignes qui faſſent les mêmes angles [f], & forment de ſemblables triangles.

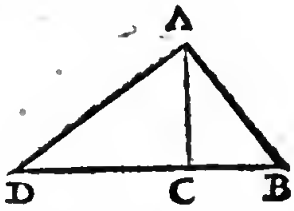
Lemme I.

27 *Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire une perpendiculaire ſur la baſe, cette ligne le partagera en deux autres triangles ſemblables, & à lui, & entre eux.* Eucl. VI. Prop. 8.

Soit *ABD* un triangle rectangle. Si de *A* l'angle

a *L.* 2. *n.* 52 & 39. b *ſup. n.* 18. c *L.* 2. *n.* 52 & 39.
d *L.* 2. *n.* 39. & 52. e *L.* 2. *n.* 122. f *L.* 2. *n.* 29.

gle droit on mene *AC* une perpendiculaire sur la base *BD*, je dis que les trois triangles *ABD*, *ABC*, *A D* sont tous trois semblables.



1°. Ils sont tous rectangles. 2°. Les deux triangles *ABD* & *ABC* ont l'angle *B* commun : ainsi ils ont tous leurs angles égaux [a], & par conséquent semblables [b]. Les triangles *ABD* & *ADC* ont aussi l'angle *D* commun ; ils sont donc aussi semblables. Puisque *ABC* & *ADC* sont semblables à un troisieme, ils sont semblables entre eux [c]. Par conséquent les trois triangles rectangles *ABD*, *BCA*, *CAD* sont semblables.

THEOREME X.

Lorsque dans un triangle rectangle on mene 28
une perpendiculaire de l'angle droit de l'hypothénuse ; voilà ce qui arrive :

1°. *La perpendiculaire est une moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypothénuse.*

2°. *Le côté majeur est un moyen proportionnel entre l'hypothénuse, & la plus grande partie.*

3°. *Le côté mineur est un moyen proportionnel entre l'hypothénuse & la plus petite partie.*

Par le Lemme précédent, le triangle rectangle *ABD*, est divisé par la perpendiculaire *AC* en deux triangles rectangles qui lui sont semblables & entre eux ; de sorte que *ABD*, *CBA*, *CAD* sont trois triangles semblables. Partant [d]

1°. *BC. AC :: AC. CD*, ou $\div$ *BC. AC. CD.*

2°. *CD. AD :: AD. BD* ou $\div$ *CD. AD. BD.*

3°. *BC. AB :: AB. BD.* ou $\div$ *BC. AB. BD* ; ce qu'il falloit démontrer.

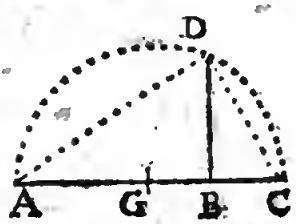
a *L. 2. n. 10.* b *sup. n. 3.* c *sup. n. 11.* d *sup. n. 10.*

PROBLEME VIII.

29 *Entre deux lignes données trouver une moyenne proportionnelle.* Eucl. VI. Prop. 13.

Premiere maniere.

Les deux lignes données ſont *AB* & *BC*; je les joins de ſorte qu'elles faſſent une ligne droite, du milieu de laquelle, qui eſt *G*, & de l'intervalle de ſa moitié, ſavoir de l'intervalle *AG*, je décris un demi cercle; j'éleve enſuite ſur *B* une perpendiculaire, que je prolonge juſques à ce quelle ſe termine dans la circonference du cercle, ſavoir, au point *D*; je dis que *BD* eſt moyenne entre *AB* & *BC*.

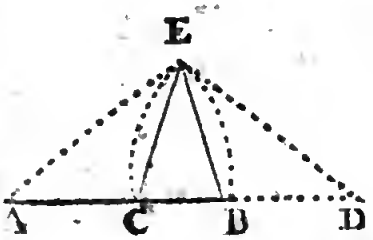


L'angle *ADC* dans le demi cercle eſt droit*: par la conſtruction *BD* eſt perpendiculaire: donc par le Theorême précédent *BD* eſt moyenne proportionnelle entre *AB* & *BC* ou ∴ *AB. BD. BC.*

Seconde maniere.

AB & *CB* ſont deux lignes données; je prolonge *A* de ſorte que *BD* = *AC*: & de *D* & de *A*, comme centres, & d'intervalles égaux *AB* & *CD*, je fais deux cercles qui ſe coupent en *E*: la ligne *EB* ou *EC* ſera la moyenne entre *AB* & *CB*.

Par la conſtruction *AB* = *AE*, & *CE* = *BE*: donc *EAB* & *CEB* ſont deux iſoſceles; ils ont l'angle commun *ABE*: donc ces deux iſoſceles



ſont

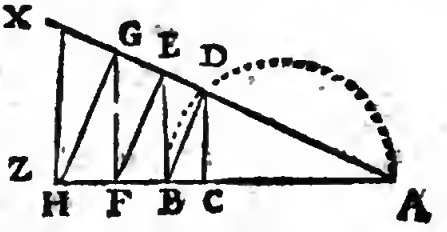
* L. 2. n. 44.

ſont équiangles [a], & partant ſemblables [b]: donc *AB. BE* :: *BE. BC*, ou ÷ *AB. BE. BC* [c].

PROBLEME IX.

Ayant les trois premieres lignes d'une progreſſion géométrique de lignes, trouver les autres à l'infini. 30

Soient trois lignes en progreſſion. La premiere eſt *AC*, la ſeconde *AD*, la troiſieme ligne eſt *AB*, que je partage par la moitié; & de l'intervalle de cette moitié, je décris un demi cercle. Je prens ſur cette ligne *AB* une partie égale à la premiere ligne *AC*; & ſur *C* j'éleve une perpendiculaire qui ſe termine à la circonference du cercle au point *D*, d'où je mene une ligne au point *B*, & de *A* par *D*, une ligne infinie *X*. Je prolonge auſſi à l'infini la ligne *AB*, que je nomme *Z*; enſuite j'éleve au point *B* une perpendiculaire qui coupe *X* au point *E*, duquel je mene une perpendiculaire qui coupe *Z* au point *F*, où je dreſſe une perpendiculaire qui coupe *X* au point *G*, d'où j'abaiſſe une perpendiculaire *GH*, & ainſi de ſuite.

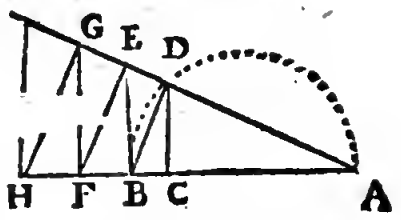


1°. La ligne *AD* étant moyenne proportionnelle entre *AC* & *AB* [d], eſt égale à la ſeconde ligne donnée, qui ſe trouve ainſi, ſi elle n'étoit pas donnée.

2°. Tous les triangles *ADB*, *ABE*, *AEF*, *AFG*, &c. ſont équiangles [e], puiſqu'outre leur angle commun *XAZ*, ils ſont tous rectangles; car l'angle *ADB* dans le demi cercle eſt droit [f], & par la conſtruction *EF* & *HG* ſont perpendi-

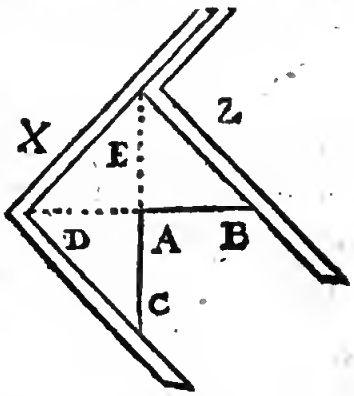
a *L.* 2. *n.* 85. b *ſup. n.* 8. c *ſuq. n.* 10. d *ſuq. n.* 28.
e *L.* 2. *n.* 80. f *L.* 2. *n.* 44.

culaires sur *X*, comme *DC BE G* le sont sur *Z*: ainsi, suivant la Définition * ils seront semblables, & auront leurs côtez homologues proportionnels †: donc *AC. AD :: AD. AB*, & *AD AB :: AB. AE*, & *AB. AE :: AE AF*, & *AF AG :: AG AH*, &c. par conséquent ÷ *AC. AD. AB. AE. AF. AG. AH*, &c.



31 *Jusqu'à présent on n'a point découvert le moyen de trouver avec le compas & la seule règle, deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données. On les trouve mécaniquement.*

Les lignes données sont AB & AC, *qu'on joint de sorte qu'elles fassent un angle droit. On dispose l'équerre* X *de maniere, que son angle soit sur le prolongement de* AB, & *qu'une de ses règles rase* C *extrémité de* AC.

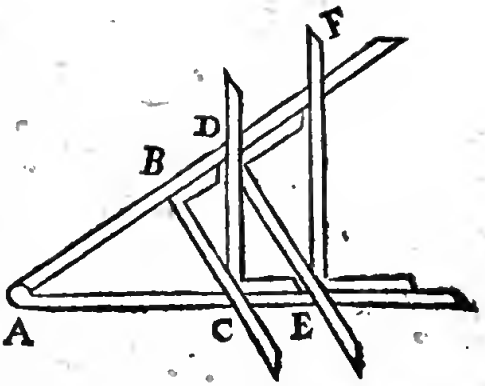


Z est une seconde équerre qu'on dispose, en sorte qu'une de ses règles rase X, & *l'autre le point* B *extrémité de* AB: *ainsi les triangles* CDE & DEB, *sont rectangles*, & DA & EA *sont des perpendiculaires*; *ainsi* ‡ ÷ AC. AD. AE. & ÷ AD. AE. AB: *donc* ÷ AC. AD. AE. AB.

Cette invention est de Platon. Descartes en propose une autre, avec laquelle il trouve entre deux

* *sup. n.* 8. † *sup. n.* 10. ‡ *sup. n.* 28.

deux lignes données autant de proportionnelles, qu'on en veut. L'inſtrument dont il ſe ſert eſt compoſé de pluſieurs équerres, qui ſont tellement ajuſtées les unes avec les autres,



que lorſque l'angle FAE *eſt fermé, ou que les deux règles* FA *&* AE *ſe touchent, toutes les autres règles* BC, CD, DF, EF *ſe touchent & viennent au point* A: *ſi cet angle* EAF *s'ouvre, ces mêmes règles ſe pouſſent & ſe chaſſent.*

Deux lignes étant donc données, je pouſſe la règle BC, *de ſorte que* AB *ſoit égale à la plus petite, & j'ouvre l'angle* EAF *de ſorte que la règle* DE *ſoit éloignée de* A *de la grandeur de la ſeconde ligne.*

Il eſt évident que AC *&* AD *ſeront deux moyennes proportionnelles entre* AB *&* AE.

Pour trouver pluſieurs moyennes proportionnelles, il faut augmenter le nombre des équerres.

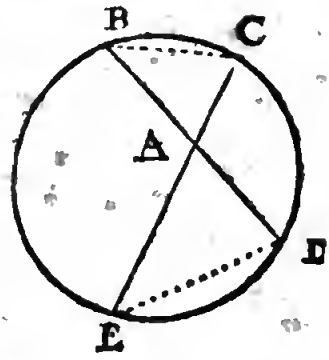
THEOREME XI.

Deux cordes qui ſe coupent dans un cercle, ont leurs parties en proportion réciproque. 32

Soient les deux lignes, *BD*, *CE* qui ſe coupent au point *A*, il faut prouver que *BA. CA :: AE. AD.*

Soient tirées *BC*, *ED*; elles formeront les deux triangles ſemblables *BAC*, *EAD*;

car les angles en *A* ſont égaux, & l'angle *B* eſt égal à l'angle *E*, puiſqu'ils s'appuyent ſur le même arc *CD*; donc ils ont leurs côtez homologues proportionnels *. Donc *BA. CA :: AE. AD*. Donc *alternando* réciproquement *AB* eſt à *AE*, comme *CA* à *AD*; ce qu'il falloit prouver.

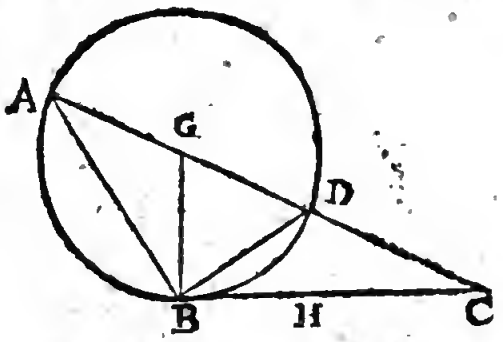


LEMME II.

33 *Si d'un point hors d'un cercle on lui mene une tangente & une ſécante, cette tangente eſt moyenne proportionnelle entre la ſécante entiere, & ſa partie hors le cercle.*

Soit la tangente *CB* & la ſécante *CA*; il faut prouver que *AC. CB :: CB. CD*, ou ∴ *AC. CB. CD*.

Les deux triangles *ACB* & *DCB* ont l'angle *C* commun. L'angle *DBC* a pour ſa meſure la moitié de l'arc *BD* †. Cette moitié eſt auſſi la meſure de l'angle *BAC* ‡: ainſi les deux triangles *ACB* & *BDC* ayant deux angles égaux, & par conſéquent le troiſieme, ils ſont ſemblables, & proportionnels ‡: le côté *DC* du triangle *BCD* eſt



* *ſup.* 8. 10. † *L.* 2. *n.* 37. ‡ *L.* 2. 8. 39. ‡ *ſup. n.* 8. & 10.

est homologue avec le côté *BC* du triangle *ACB*: ainsi *AC. BC:: BC. CD*, ou ∴ *AC. BC. CD*; ce qu'il falloit démontrer.

Probleme X.

Diviser une ligne en telle sorte, que la plus grande partie soit moyenne proportionnelle entre la plus petite & la toute: ce qui s'appelle Moyenne & Extrême raison. Eucl. VI. Prop. 30. 34

La ligne donnée est *BC*; au point *B* j'éleve la perpendiculaire *BG*, qui soit la moitié de *BC*. De l'intervalle de *GB*, je fais un cercle dont le diametre sera par conséquent égal à *BC*; je tire la sécante *AC*: après quoi ayant pris *CH* sur *BC*, égale à *CD*, je dis que la ligne *BC* sera divisée au point *H*, comme il est requis. Si *HC* ou *DC* est la plus grande partie, & *BH* ou *BC — HC* la plus petite; il faut démontrer que ∴ *BC. CH. HB* Par le Lemme précédent, *AC. BC:: BC. CD*, & retranchant de *AC* & *BC* les lignes *BC* & *CD*, les restes *AC — BC* & *BC — CD* seront encore en même proportion *: ainsi *BC. CD:: AC — BC. BC — CD*. Mais par la construction *AC — BC = DC = HC*, & *BC — HC = HB*: ainsi ∴ *BC. CH. HB*; ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire I.

Une ligne étant coupée en moyenne & extrême raison, si on lui ajoute la médiane, c'est-à-dire la plus grande partie, cette nouvelle ligne sera encore divisée en moyenne & extrême raison, dont la premiere sera la médiane. 35.

* L. 3. n. 45.

Soit AC une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon au point B. La médiane ou la plus grande partie eſt BC, que j'ajoute à cette ligne, faiſant que CD ſoit égale à BC. Il faut prouver que $\div AD. AC. CD$.

Soit $AC = a$, & $CB = x$; donc $a - x = AB$. & $CD = x$, & $a + x = AD$. Il faut donc prouver que $\div x. a + x. a. x$.

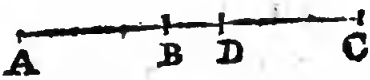
Par l'Hypotheſe $a. x :: x. a - x$.

Permutando $x. a :: a - x. x$.

Componendo $x + a. a :: a - x + x. x$. Mais $a - x + x = zero$. Donc $x + a. a :: a. x$, ou $\div x + a. a. x$; ce qu'il falloit prouver.

Corollaire II.

36 *Une ligne étant diviſée en moyenne & extrême raiſon, ſi on retranche de la médiane la plus petite partie, le reſte ſera encore diviſé en moyenne & extrême raiſon.*



La ligne AC eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon, au point B. Sa plus petite partie eſt AB. Il faut prouver, que ſi de BC on retranche $DC = AB$, le reſte AD ſera diviſé ſelon la même raiſon; c'eſt-à-dire, que $\div AD. AB. BD$. Soit $AB = y$, $BC = x$, $BD = x - y$. Donc $AC = y + x$. Il faut ainſi démontrer que $\div x - y. y. x$.

Se-

Selon l'Hypotheſe $y.\ x :: x.\ y + x$.

Permutando $x.\ y :: y + x.\ x$.

Dividendo $x - y.\ y :: y + x - x.\ x$. Et comme $+ x - x = 0$: donc $x - y.\ y :: y.\ x$. Ainſi $\div x - y.\ y.\ x$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE III.

Du premier Corollaire il eſt aiſé de conclure que lorſqu'on a une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes diviſées en moyenne & extrême raiſon, ſi on ajoute à la toute la médiane: Et par le ſecond Corollaire, qu'on en peut avoir une infinité de plus petites toutes diviſées en moyenne & extrême raiſon, en retranchant la plus petite de la médiane. 37

SECTION III.

Des Raiſons & Proportions que les circuits de deux ou pluſieurs figures ont entre eux; & avec les rayons des cercles, où ces figures ſont inſcrites.

DEFINITION.

Deux figures rectilignes ſont dites ſemblables, lorſque leurs angles ſont égaux chacun à chacun, & que les côtez qui les comprennent ſont proportionnels. 38

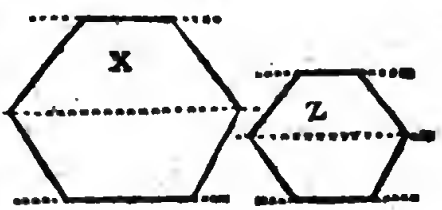
COROLLAIRE.

Il s'enſuit que toutes les figures regulieres de même nom ſont ſemblables: car étant de 39

même nom, elles auront même nombre de côtez & d'angles; & à cauſe de la régularité, tous ces angles ſeront égaux auſſi-bien que les côtez qui les comprennent *, & partant proportionnels en raiſon d'égalité; ainſi ſuivant cette Définition, elles ſeront ſemblables.

THEOREME I.

40 *Les circuits de deux figures ſemblables ſont entre eux en même raiſon, que leurs côtez chacun à chacun.*



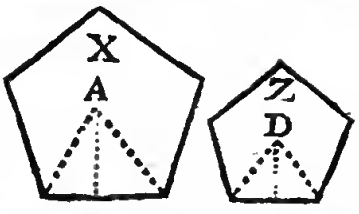
Soient *X* & *Z* deux hexagones, chaque côté de *X* eſt *a*; ainſi tout ſon circuit eſt 6 *a*, chaque côté de *Z* eſt *b*, & tout ſon circuit par conſéquent eſt 6 *b*. Or 6 *a*. 6 *b* : : *a*. *b* †.

THEOREME II.

41 *Les circuits de deux figures régulieres & ſemblables, ſont entre eux comme les rayons ou diametres des cercles où elles ſont inſcrites, & comme leurs apothêmes.*

X & *Z* ſont deux polygones réguliers & ſemblables. Du centre du cercle où ils ſont inſcrits, je mène les lignes *AB* & *AC*, *DE* & *DF*, qui ſont rayons. Les deux triangles *BAC* & *DEF* ſont iſcoſceles par la conſtruction; & puiſque ces deux figures ſont ſemblables, les angles de leurs centres *BAC* & *EDF* ſont les mêmes; ainſi ces triangles ſont ſemblables: donc *AB*, ou le rayon de *X* eſt à *DE*, rayon de *Z*, comme *BC* à *EF*. Or le cir-

* *L.* 2. *n.* 106. † *L.* 3. *n.* 54.



circuit de *X* eſt à celui de *Z* par le Théorême précédent, comme *BC* & *BF*: donc le circuit de *X* eſt à celui de *Z*, comme le rayon de *X* à celui de *Z*, ou comme le diametre de l'un eſt au diametre de l'autre; car les rayons & les diametres ont entre eux une même raiſon, les rayons étant la moitié des diametres.

Soit *AM* une perpendiculaire ſur *BC*, elle ſera l'apothéme de *X* *. De même ſoit *DN* perpendiculaire de *D* ſur *EF*, elle ſera l'apothême de *Z*. Or ſelon ce qu'on a prouvé † *BC* ſera à *EF* comme l'apothême de *X* eſt à *Z*; ainſi le circuit de *X* eſt à celui de *Z*, comme l'apothême de *X* à l'apothême de *Z*.

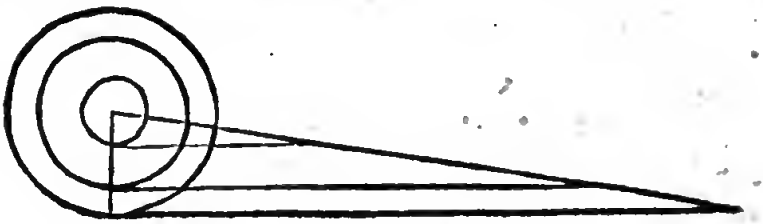
Corollaire.

Les circonferences de deux cercles ſont entre elles, comme les diametres ou rayons de ces cercles. 42

Les cercles peuvent être conſiderez comme des polygones réguliers: or les circuits de deux polygones ſont entre eux comme leurs diametres: donc les circuits ou circonferences des cercles ſont entre elles comme les diametres des cercles; & par conſéquent puiſque les rayons ſont la moitié des diametres, comme les rayons de ces cercles.

Si on conçoit dans un cercle une infinité d'autres cercles concentriques, dont les circonferences ſoient déployées & dreſſées comme des lignes droites, le rayon du grand cercle & ſon circuit feront

* *L. 2. n. 144.* † *ſup. 8. 10.*



ront un triangle rectangle, dans l'hypothénuſe duquel les extrémitez des cercles concentriques auſſi déployez doivent ſe trouver, puiſqu'ils ſont entre eux comme les parties du rayon du cercle qu'ils coupent. C'eſt pourquoi l'on a conclu de-là, que la ſurface du cercle étoit égale à un tel triangle. Ce que nous avons démontré par une autre voye *.

THEOREME III.

43 *Les arcs d'égale quantité de degrez dans differens cercles, ſont entre eux comme ces cercles dont ils ſont les parties.*

Les degrez ſont les parties proportionnelles d'un tout; ils ſont donc entre eux comme les touts dont ils ſont les parties; c'eſt-à-dire, comme les cercles dont ils ſont les degrez.

THEOREME IV.

44 *Les cordes d'arcs ſemblables, dans differens cercles, ſont entre elles comme les arcs dont elles ſont les cordes.*

Concevant que du centre des cercles où ſont ces cordes ont ait mené des lignes à leurs extrémitez, on aura des triangles ſemblables, puiſque ces cordes d'arcs ſemblables ont les angles au centre égaux: ces cordes ſont donc entre elles comme les rayons de ces cercles; &

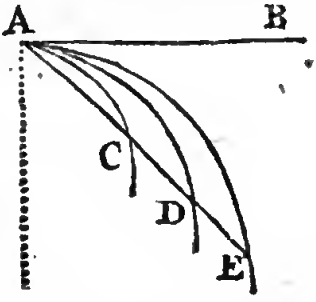
* *L. 2. n. 154.*

& partant comme ces cercles, qui ſont entre eux comme leurs rayons *. Or les arcs d'égale quantité de degrez ſont entre eux, comme les cercles dont ils ſont parties, par le Theorême précédent; ces cordes ſont donc entre elles comme les arcs dont elles ſont les cordes.

THEOREME V.

Si d'un point où pluſieurs cercles ſe touchent, on mene une ligne qui coupe ces cercles, les parties de cette ligne ſeront entre elles comme les cercles qu'elle coupe. 45

A eſt un point où ſe touchent pluſieurs cercles. Soit mené de *A* une ligne qui coupe les cercles *C*, *D*, *E*; il faut prouver que les parties *AC*, *AD*, *AE* de cette ligne ſeront entre elles, comme les cercles qu'elles coupent. Par *A* je mene *AB*, qui touche ces cercles; ainſi l'angle *BAE*, a pour meſure ou l'arc *CA*. ou *AD*, ou *AE* †, ainſi ces trois arcs ſont ſemblables. Les cordes *AC*, *AD*, *AE*. par le Théorême précédent d'arcs ſemblables, ſont entre elles, comme les arcs *AC*, *AD*, *AE*, & ces arcs ſont entre eux comme leurs cercles; les parties de ladite ligne ſeront donc entre elles, comme les cercles qu'elle coupe.



THEOREME VI.

Dans le même cercle ou dans les cercles égaux, les angles qui ont leur ſommet, ſoit dans la circonference, ſoit dans le centre, ſont entre eux com- 46

* *Sup n.* 42. † *L.* 2. *n.* 87.

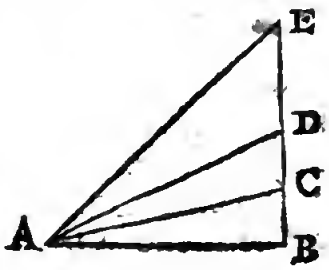
comme les arcs ſur leſquels ils ſont appuyez. Eucl. VI. Prop. 33.

Cela eſt bien évident, puiſque ces arcs en ſont les meſures *.

LEMME.

47 *Dans un triangle rectangle diviſant un des angles aigus en tant de parties égales qu'on voudra, & menant des lignes droite ſur le côté oppoſé, les parties de ce côté les plus éloignées de la perpendiculaire, ſont les plus grandes.*

Soit *ABE* un triangle rectangle, dont l'angle *BAE* eſt diviſé en tant de parties égales qu'on voudra par les lignes droites menées du point *A* juſques à *BE*. Il faut prouver que les parties de *BE* les plus éloignées de *AB*, ſeront les plus grandes. Que la partie *DC* eſt plus grande que *CB*, & *ED* plus grande que *DC*.



Puiſque, ſuivant l'hypotheſe, l'angle *BAC* a été fait égal à l'angle *CAD*, l'angle *BAD* ſera diviſé en deux; & ſuivant ce qui a été démontré †, *DC. CB :: AD. AB.* Or ‡ *AD* > *AB*; donc *DC* > *CB*.

Par la même raiſon ſi l'angle *CAE* eſt diviſé en deux, que *CAD* ſoit égal à *DAE*; alors *ED. DC :: AE. AC*; & puiſque *AE* > *AC*: donc *ED* > *DC*. Ainſi les parties de *BE* les plus éloignées de *AB* ſeront les plus grandes.

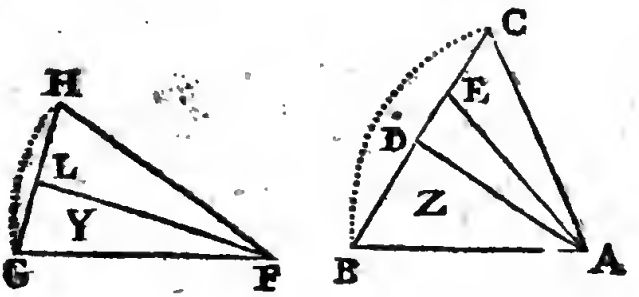
THEO-

* *L.* 2. *n.* 10. & 39. † *ſup. n.* 17. ‡ *L.* 3. *n.* 59.

THEOREME VII.

De deux Polygones réguliers inſcrits dans les mêmes, ou en diffrens cercles, celui qui a plus de côtez a un plus grand apothême, à raiſon de ſon circuit. 48

Soient deux Polygones *Z* & *Y*. Je ſuppoſe que *Y* a deux fois plus de côtez que *Z*; qu'ainſi ſi *BC* eſt une corde de 20 degrez, *GH* ſera de 10; c'eſt-à-dire, que ſi *Z* a 18 côtez, *Y* en aura 36.



AD eſt l'apothême de *Z* [a], & *FL* l'apothême de *Y*. On ſuppoſe l'angle *BAC* double de *GFH*; ainſi *DAC* eſt égal à *GFH*. Ayant donc partagé également en deux l'angle *DAC*, l'angle *DAE* ſera égal à *DFH*.

Ces deux triangles *LFH* & *DAE* ſont rectangles, & ont les angles *LFH*, *EAD* égaux; ils ſont donc équiangles [b], & ſemblables [c]; ainſi *LH. LF:: DE. DA* [d]. Le Polygone *Y* eſt de 36 côtez; ainſi 72 *LH* eſt ſon circuit. Je multiplie par le même nombre *DE*. Si *DE* étoit la quatrieme partie de *BC*, alors 72 *DE* ſeroient juſtement le circuit du Polygone *Z*, qui a 18 côtez, & contient 18 fois *BC*;

a *L.* 2. *n.* 144. b *L.* 2. *n.* 80. c *ſup. n.* 8. d *ſup. n.* 10.

BC; mais par le Lemme précédent, *DE* eſt plus petit que *EC*, partant moindre que la quatrieme partie de *BC*; 72 *DE* ſeront donc moindres que le circuit de *Z*, que je nomme *m*; partant 72 *DE* auront moindre raiſon à *DA*, que non pas *m*, qui eſt plus grand *. Mais comme il vient d'être démontré, *LH. Lt*:: *DE. DA*, auſſi † 72 *LH. Lt*:: 72 *DE. DA*; partant 72 *Lt* auront moindre raiſon à l'apothême *Lt*, que le dit *m*, circuit du Polygone *Z* à *DA* ſon apothême; ce qu'il falloit prouver.

La precedente démonſtration bien entendue, ſe peut appliquer generalement à tous autres Polygones non ſeulement en raiſon multiple des côtez, mais auſſi en quelque proportion que ce ſoit, comme de 5 a 13, ou telle autre qu'on voudra, laquelle ne peut jamais être que de nombre à nombre; ainſi au-lieu que dans l'exemple propoſé l'angle DAC *eſt double de* DAE, *il ſeroit ici comme* 13 *à* 5; *& on pourra le ſuppoſer être diviſé en* 13 *parties égales, dont l'angle* DAE *en contient* 5: *& par le même Lemme les cinq portions de la partie* DE *plus près de la perpendiculaire* DA, *ſeront toujours à proportion plus petites, que les* 13 *de la ligne* DC; *& ainſi* 26 *fois* DE *ſeront toujours moindres, que dix fois* DC *qui ſont les circuits des Polygones, dont le nombre des côtez eſt* 13 *&* 5, DE *&* DC *n'étant chacune qu'une moitié de leurs côtez; & partant on conclura toujours, comme ci-devant, ce qui a été propoſé.*

COROLLAIRE I.

49 *De deux Polygones de même circuit, l'apothême de celui qui a plus de côtez eſt plus grand.*

Soient

* *L.* 3. *n.* 91. † *L.* 3. *n.* 54.

Soient deux Polygones Z & Y, qui ont un même circuit m. L'apothême de Z qui a moins de côtez soit b, celui de Y qui en a plus soit d. Par le préſent Theorême b eſt plus petit, au regard de m, que d au regard de m; ce qu'il falloit prouver.

Corollaire II.

Un cercle d'un même circuit qu'un Polygone, a ſon rayon plus grand que l'apothême de ce Polygone. 50

Un cercle eſt un Polygone d'une infinité de côtez, qui a pour apothême ſon rayon; qui eſt ainſi plus grand que l'apothême d'aucun autre Polygone, ſelon le Corollaire précédent.

SECTION IV.

Des Raiſons & des Proportions des Surfaces.

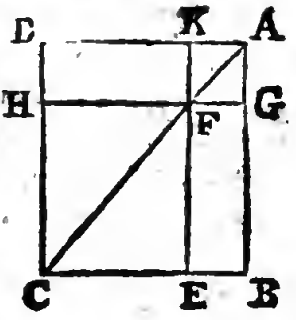
Theoreme I.

En tout parallelogramme, les parallelogrammes adjacens, ou qui ſont autour du diametre, ſont ſemblables entre eux, & au parallelogramme entier. Eucl. VI. Prop. 24. 51

Soit $ABCD$ un parallelogramme, dont le diametre eſt AC, autour duquel ſoient deux autres parallelogrammes $AGFK$ & $CEFH$. 1°. Chacun d'eux a un angle commun avec $ABCD$. Les angles oppoſez dans les parallelogrammes ſont égaux *: Donc $GAK = ECH = HFE$, & $KAG = KFG$. Ainſi ces trois paral-

* *L.* 2. *n.* 119.

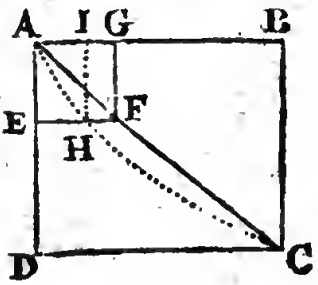
rallelogrammes ayant deux de leurs angles égaux, les autres le ſont auſſi; car leurs côtez étant paralleles, ils ſont les mêmes angles [a]. Les triangles *B* , *AGE*, *FEC* ſont donc équiangles, par conſéquent ſemblables[b], comme auſſi *ADC*, *AKF*, *FHC*: donc [c] *AG. GE*:: *AB. BC*, & *AG. AE*:: *AB. AC*, & *AF. AK*:: *AC. AD*. De même *AK. AG*:: *AD AB*. Donc *AKFG* & *ABCD* ſont ſemblables. De même *CEFH*, & *ABCD* ſont ſemblables [d].



THEOREME II.

52 *Si d'un parallelogramme on retranche un parallelogramme ſemblable, ſemblablement poſé au total, & ayant un angle commun avec lui, le parallelogramme retranché ſera à l'entour du diametre du parallelogramme total.* Eucl. VI. Prop. 26.

Soit du parallelogramme *ABCD* retranché le parallelogramme *AGFE*; ils ſont ſemblables, & ont l'angle *EAG* commun. Il faut prouver que leurs diametres ſont dans la même ligne. Si on le nie, & qu'on diſe que le diametre *AHC* coupe *EF* au point *H*; je mene *HI*, parallele à *AE*. Les parallelogrammes *EI* & *DB* ſont ſemblables [e]. Donc *AE. EH*:: *AD. DC*:: *AE. EF* [f]. Donc *EH* = *EF* [g]. Ainſi



a L. 2. n. 27. b *ſup.* n. 8. c *ſup.* n. 10. d *ſup.* n. 38. e *ſup.* n. 51. f *ſup.* n. 38. g L. 3. n. 52.

Ainſi la partie eſt égale à ſon tout; ce qui eſt abſurde.

THEOREME III.

Lorſqu'une ligne eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, le rectangle de la toute & de la petite partie eſt égal au quarré de la médiane. 53

Soit la ligne AB coupée en moyenne & extrême raiſon. La médiane eſt AD. Donc $AB.AD::AD.DB$, ou $\div AB\ AD\ BD$.

Donc $\overline{AD}^2 = AB \times DB$ *; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Couper une ligne droite de telle ſorte, que le rectangle de la toute & de l'une de ſes parties, ſoit égal au quarré de l'autre. Euclid. II. Prop. 11. 54

Il ne s'agit que de couper la ligne donnée en moyenne & extrême raiſon, ainſi qu'il a été enſeigné †. Le rectangle de la toute & de la petite partie, eſt égal au quarré de la médiane, ſelon ce Théorême.

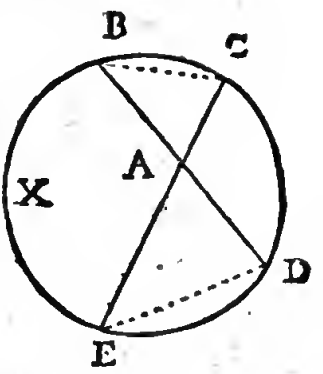
THEOREME IV.

Si dans un cercle deux lignes droites ſe coupent, le rectangle compris des deux parties de l'une, eſt égal au rectangle compris des deux parties de l'autre. Eucl. III. Prop. 35. 55

Les deux cordes BD & CE du cercle X ſe

* *L.* 3. *n.* 57. † *ſup. n.* 34.

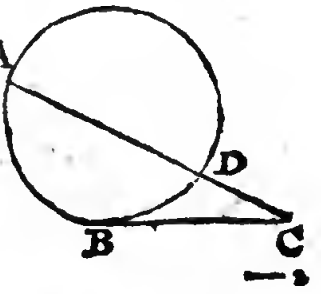
ſe coupent au point *A*. Il faut prouver que $BA \times DA = CA \times EA$. On a prouvé [a] que $BA. AE :: AC. AD$. Donc $BA \times AD$, produit des extrêmes, $= AE \times AC$ produit des moyennes [b]; ce qu'il falloit [c] démontrer.



THEOREME V.

56 *Si d'un point pris à diſcretion hors du cercle, on tire deux lignes droites, dont l'une le touche & l'autre le coupe, & va ſe terminer à ſa circonference concave, le rectangle compris de toute la coupante & de la partie hors du cercle, ſera égal au quarré de la touchante.* Euclid. III. Prop. 36.

De *C*, un point hors le cercle, ſoient menées deux lignes droites, *CB*, qui touche le cercle, & *CA* qui le coupe. Il faut prouver que $AC \times CD = \overline{BC}^2$. On a démontré [c]



que $\fallingdotseq AC. BC. DC$: Donc $AC \times CD = BC^2$; ce qu'il faloit prouver.

COROLLAIRE I.

57 *Si d'un point pris à diſcretion hors d'un cercle, on mene tant de lignes droites que l'on voudra, qui coupent le cercle & qui aillent ſe terminer à ſa circonference concave; le rectangle compris d'une*

a *ſup. n.* 32. b *L.* 1. *n.* 56. c *ſup. n.* 33. *L.* 3. *n.* 57.

d'une de ces coupantes telle que l'on voudra, & de ſa partie hors du cercle, ſera égal au rectangle compris de telle autre coupante que l'on voudra, & de ſa partie hors du cercle.

Car chacun de ces rectangles eſt égal au quarré de la couchante, qui ſeroit mené de ce même point.

Corollaire II.

Si d'un point pris à diſcretion hors d'un cercle, on mene deux lignes droites qui le touchent, elles ſeront égales entre elles. 58

Car le quarré de chacune de ces tangentes eſt égal au rectangle d'une coupante & de ſa partie hors du cercle; & ainſi chacun de ces quarrez eſt égal à l'autre: d'où il ſuit que les lignes qui en ſont les côtez, ſont égales.

Theoreme VI.

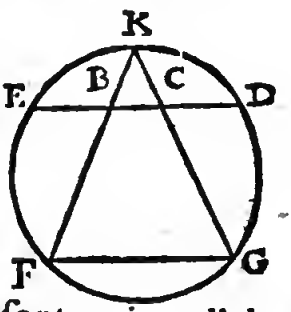
Si d'un point pris à diſcretion hors d'un cercle, on mene deux lignes droites, dont l'une coupe le cercle & va ſe terminer à ſa circonference concave, & l'autre atteint le cercle; & que le rectangle compris de toute la coupante & de la partie hors du cercle ſoit égal au quarré de celle qui atteint le cercle, celle-ci touchera le cercle. Eucl. III. Prop. 37. 59

Soit la même figure que ci-deſſus. Puiſque le quarré de cette ligne qui atteint le cercle, eſt égal au rectangle $AC \times DC$, elle ſera égale à la tangente BC, dont le quarré eſt égal à ce rectangle; ce ne peut donc pas être une ligne differente, elle eſt donc tangente: ce qu'il falloit prouver.

Theoreme VII.

Si d'un point dans la circonference d'un cercle on mene deux lignes à la circonference concave, & par des points également éloignez du point 60

donné, on mene une troiſieme qui coupe les deux lignes; le rectangle fait de l'une & de ſa partie compriſe entre le point donné & la troiſieme ligne, eſt égal au rectangle fait de l'autre ligne & de ſa partie, compriſe de même entre le point donné & la troiſieme ligne.



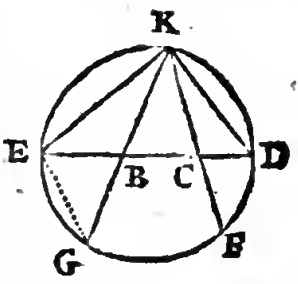
Soit *K* un point dans la circonference du cercle, d'où ſoient menées les lignes *KF* & *KG*, & par les points *E* & *D* également éloignez de *K*, la ligne *ED*. Il faut prouver que $KF \times KB = KG \times KC$. Les deux lignes *BC* & *FG* ſont antiparalleles; car l'angle *KBC* a pour ſa meſure la moitié de l'arc *EF*, plus celle de *KD* ou de ſon égale *KE* [a]. Or la moitié de *KF* eſt auſſi la meſure de *KGF* [b]: donc $KBC = KGF$. Par le même raiſonnement $KCB = KFG$. Ainſi, ſelon la Définition des antiparalleles [c], *FG* & *BC* ſont antiparalleles. Donc $KF. KC :: KG. KB$ [d]. Donc $KF \times KB = KG \times KC$ [e]; ce qu'il falloit prouver.

Corollaire.

61 Les mêmes choſes que deſſus étant poſées, il s'enſuit non-ſeulement que ſi du point *K* on tire des lignes à l'infini, terminées à la circonference concave, & coupées par la droite *ED* comme *KF* ou *KG*, tous les rectangles qui en ſeront faits en la maniere ci-deſſus, ſeront égaux entre eux, puiſque prenant ces lignes deux à deux, ils ſeront chacun égaux au rectangle $FK \times KB$; mais encore, que ſi du point *K* on tire la droite *KE*, le quarré de ladite *KE* ſera égal à cha-

a *L.* 2. *n.* 52. b *L.* 2. *n.* 39. c *ſup. n.* 18. d *ſup. n.* 39. e *L.* 3. *n.* 56.

chacun de cesdits rectangles; car ayant tiré la droite *EF*, il se formera toujours deux triangles semblables tels que *FKE*, *EKB* dont l'angle *K* sera commun, & les deux autres angles aussi égaux; savoir *BFK* à *KEB*, & *FEK* à *EBK* [a], chacun étant appuyé sur égales circonferences du cercle, ainsi ils auront leurs côtez homologues proportionnels [b]; & partant *FK. KE:: KE. KB*: donc le rectangle *FK* × *KB* égal au quarré de *KE* [c]. Et il s'ensuit aussi, que si la ligne *ED* est un diametre du cercle, la ligne *KE* sera le côté du quarré inscrit dans le cercle [d], auquel chacun des rectangles faits desdites lignes tels que *FK* × *KB* ou autres, seront égaux.



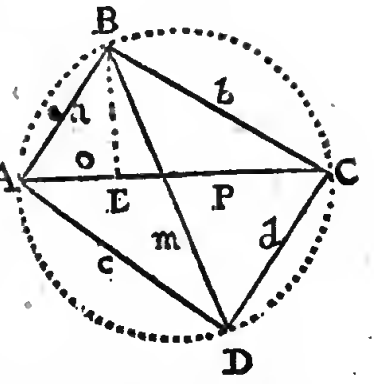
Theoreme VIII.

Si l'on inscrit un quadrilatere dans un cercle, le rectangle fait des diagonales est égal a la somme des rectangles faits des côtez opposez. 62

Soit le quadrilatere *ABCD*, dont les diagonales sont *AC* & *BD*. Il faut prouver *AC* × *BD* = *BC* × *AD* + *AB* × *DC*. Soit menée *BE*, en sorte que l'angle *ABE* soit égal à *CBD*, & qu'ayant retranché l'une & l'autre de l'angle *ABC*, les restans *CBE* & *ABD* soient égaux; ainsi comme les angles *ADB* & *ACB* appuyez sur le même arc sont égaux [e], les triangles *BDA* & *BCE* sont équiangles [f], & semblables [g]. Donc *BD. AD:: BC. CE* [h]; ainsi le

a *L.* 2. *n.* 43. b *sup. n.* 10. c *L.* 3. *n.* 56.
d *L.* 2. *n.* 124. e *L.* 2. *n.* 40. f *L.* 2. *n.* 30.
g *sup. n.* 8. h *sup. n.* 10.

rectangle des extrêmes eſt égal à celui des moyennes : & par conſéquent $BD \times CE = AD \times BC$ [a].



Par les mêmes raiſons que deſſus, les triangles BDC & BAE ſont ſemblables : car $ABE = DBC$ par la conſtruction, & $BAC = BDC$ étant appuyez ſur le même arc BC, ils auront donc auſſi leurs côtez homologues proportionnels. Donc $BD.\ CD :: AB.AE$. Ainſi $BD \times AE = CD \times AB$ [b]. Or $BD \times AE + BD \times CE = BD \times AC$ [c]. Donc puiſque $BD \times AE = CD \times AB$ & $BD \times CE = AD \times BC$, il faut donc que $CD \times AB + AD \times BC = BD \times AC$, deux choſes égales à une troiſieme, étant égales entre elles. Or c'eſt ce qu'il falloit démontrer.

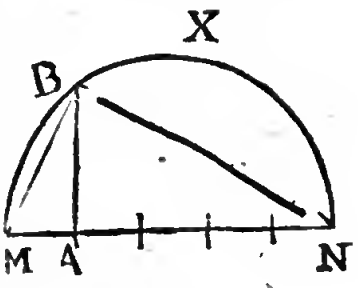
THEOREME IX.

63 *Si on coupe le diametre d'un cercle, en ſorte qu'une partie ſoit quadruple de l'autre, & que ſur ce point de diviſion on éleve une perpendiculaire terminée à la circonference ; je dis que le quarré de la corde menée de l'extrémité de ce diametre à l'extrémité de la perpendiculaire, eſt égal à cinq fois celui de la petite partie de ce diametre, dont celui de la perpendiculaire eſt le quadruple.*

Soit le diametre MN du cercle X partagé en A, en ſorte que $AN = 4\,AM$. Si l'on éleve la perpendiculaire AB & qu'on mene les cordes MB, BN, formant le triangle rectangle MNB [d] ; je dis que $\overline{MB}^2 = 5\,\overline{AM}^2$. Soit $AM = a$:

a *L. 3. n. 56.* b *L. 3. n. 56.* c *L. 3. n. 17.* d *L. 2. n. 44.*

$= a$: donc, ſelon la ſuppoſition, $MN = 5a$. Soit $MB = b$: donc $\div\div 5\ a.\ b.\ a$ [a], partant $bb = 5\ aa$ [b]. Soit maintenant $BA = d$; ainſi $\div\div a.\ d.\ 4\ a$ [c]. Donc par la même raiſon $4\ aa = dd$. C'eſt ce qu'il falloit prouver.



Corollaire I.

64 *Le diametre* MN *étant partagé en tant de parties que l'on voudra, le quarré de* MB *ſera égal à autant de fois celui de chacune de ſes parties, qu'il y a de parties.*

Si, *comme ci-deſſus & même figure*, MN eſt diviſé au point A, de ſorte que AM ſoit la cinquieme partie de MN, ou telle autre qu'on voudra, on aura toujours [d] $\div\div MA.\ MB.\ MN$, ou $\div\div 5\ a.\ MB.\ a$: donc auſſi le quarré de MB eſt égal $5\ aa$ [e].

Corollaire II.

65 *Le quarré de* BA *eſt égal à autant de fois le quarré de chacune de ſes parties, qu'il y a de parties moins une.*

Fig. précéd. Car ſuppoſant toujours la même diviſion, ou autre à volonté, on aura de même cette proportion $\div\div AM.\ BA.\ AN$, ou $\div\div a.\ BA.\ 4\ a$ [f]: donc $4\ aa$ ou $5\ aa - aa$ eſt égal au quarré de AB [g]. Ce qu'il falloit prouver, que le quarré de AB eſt égal à autant de fois le quarré de chacune des parties, qu'il y a de parties moins une.

a *ſup. n.* 28. b *L.* 3. *n.* 57. c *ſup. n.* 28. d *ſup. n.* 28. e *L.* 3. *n.* 57. f *ſup. n.* 28. g *L.* 3. *n.* 17.

THEOREME X.

66 *Si une ligne eſt coupée en moyenne & extrême raiſon; je dis que le quarré fait de la grande partie, jointe à la moitié de la ligne, vaut cinq fois le quarré de cette moitié.* Eucl. XIII. Prop. 1.

Soit BA diviſé en moyenne & extrême raiſon au point C, & $AB = 2a$, & $BC = b$: donc $CA = 2a - b$. Il faut démontrer que le quarré de $a + b$ (qui eſt $aa + 2ab + bb$) eſt égal $5aa$. Otez aa de part & d'autre, il reſtera ſeulement à prouver que $2ab + bb$ eſt égal à $4aa$.

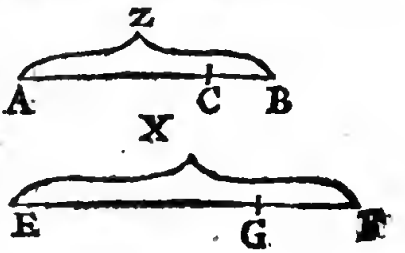
B C A

Par la ſuppoſition $2a.\ b :: b.\ 2a - b$*: donc $bb = 4aa - 2ab$ †, & ajoutant de part & d'autre $2ab$, viendra $bb + 2ab = 4aa$ ‡; ce qu'il reſtoit à prouver. Ainſi remettant aa de part & d'autre qu'on avoit premierement ôté, viendra $aa + bb + 2ab = 5aa$; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XI.

67 *Deux lignes droites coupées en moyenne & extrême raiſon, ſont ſemblablement coupées.* Eucl. XIV. Prop. 2.

Soient ces deux lignes Z & X coupées en moyenne & extrême raiſon aux points C & G. Ainſi $Z.\ AC :: AC.\ CB$, & $X.\ EG :: EG.\ GF$. Soit $AC = a$, & $CB = c$, & $EG = m$, & $GF = n$. Il faut démontrer que $AC.\ CB :: BG.\ GF$, ou que $a.\ c :: m.\ n$. Comme le quarré de la moitié de



* *Sup. n.* 34. † *L.* 3. *n.* 57. ‡ *L.* 3. *n.* 6.

de Z jointe avec a eſt égal à cinq fois le quarré de la moitié de z; de même celui de la moitié de $\frac{1}{2}X$ avec m, eſt égal à cinq fois celui de $\frac{1}{2}X$. Ainſi ces quarrez étant proportionnels, leurs côtez le ſeront auſſi *, puiſqu'ils ſont en raiſons ſousdoublées. Partant $\frac{1}{2}Z + a. \frac{1}{2}Z :: \frac{1}{2}X + m. \frac{1}{2}X$; & en diviſant † $a.\frac{1}{2}Z :: m. \frac{1}{2}X$, & doublant les conſéquens & changeant ‡ $Z. a :: X. m$; mais par la ſuppoſition $\div Z. a. c.$ & $\div X. m. n$: donc ces deux lignes ſont coupées proportionnellement ‡; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XII.

Une ligne ayant été coupée en deux parties inégales, ſi le quintuple du quarré de la moitié eſt égal au quarré fait de cette moitié joint la plus grande partie, cette ligne ſe trouvera coupée en moyenne & extrême raiſon, dont cette partie ſera la médiane. Eucl. XIII. Prop. 2. 68

Soit AB une ligne coupée en C, en deux parties inégales. Soit $AB = 2a$, & $AC = b$; ainſi $CB = 2a - b$. Il faut démontrer que ſi cinq fois le quarré de a, moitié de AB, eſt égal au quarré fait de $a + b$, c'eſt-à-dire, au quarré de la moitié a avec b; ce que j'exprime ainſi $5aa = aa + 2ab + bb$; la ligne AB aura été diviſée en moyenne & extrême raiſon, & AC ou b en ſera la plus grande partie. Pour le prouver il faut montrer, que ſi AB eſt ainſi diviſée, $5aa = aa + 2ab + bb$.

Suppoſons donc que $\div 2a. b. 2a - b$; donc $4aa - 2ab = bb$; & ajoutant de part & d'autre

* *L.* 3. *n.* 84. † *L.* 3. *n.* 51. ‡ *L.* 3. *n.* 45. ‡ *L.* 3. *n.* 53.

tre $+ 2ab$, on aura $4aa = 2ab + bb$*. Ajoutant encore de part & d'autre aa, il vient $5aa = aa + 2ab + bb$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XIII.

69 *Si une ligne droite eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, le quarré fait de la plus petite avec la moitié de la plus grande, eſt quintuple du quarré de la moitié de la plus grande partie.* Eucl. XIII. Prop. 3.

Soit AB une ligne coupée en moyenne & extrême raiſon au point C. *fig. précéd.* Soit $AC = 2m$, & $CB = n$. Donc $AB = 2m + n$. Il faut démontrer que le quarré fait de la moitié de AC la plus grande partie, avec BC la plus petite, c'eſt-à-dire, fait de $m + n$, qui eſt $mm + 2mn + nn$, eſt quintuple de celui de la moitié de AC, c'eſt-à-dire, de m, lequel eſt mm. Selon la ſuppoſition $\div 2m + n . 2m . n$: donc $2mn + nn = 4mm$ †; ajoutant mm de part & d'autre, on aura $mm + 2mn + nn = 5mm$; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XIV.

70 *Si une ligne droite eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, le quarré de la toute & celui de la plus petite partie joints enſemble, ſont triples du quarré de la plus grande partie.* Eucl. XIII. Prop. 4.

Soit AB coupée en moyenne & extrême raiſon au point C. *fig. précéd.* Soit $AB = Z$, & $AC = a$, & $BC = e$. Donc $\div Z . a . e$. Il faut démontrer que $ZZ + ee = 3aa$.

1°. $ZZ = aa + 2ae + ee$ ‡. Ainſi il faut démontrer que $aa + 2ae + 2ee = 3aa$.

2°.

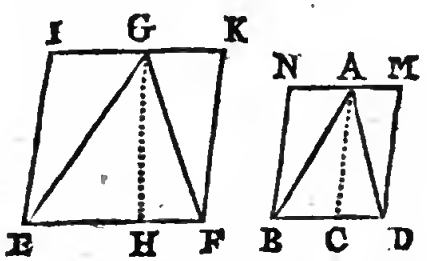
* L. 3. n. 55. † L. 3. n. 57. ‡ L. 3. n. 20.

2°. $ae + ee = Ze$ [a], & $Ze = aa$ [b] par la ſuppoſition. Ainſi $ae + ee = aa$. On peut donc dans l'Equation à prouver, ſubſtituer, au lieu de $2ae + 2ee$, leur valeur égale $2aa$, & viendra $aa + 2aa = 3aa$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XV.

Les triangles & parallelogrammes ſemblables, ſont entre eux en raiſon doublée de leurs côtez de même raiſon. Eucl. VI. Prop. 19. 71

Soient *ABD* & *EFG* deux triangles ſemblables. Soient abaiſſées les perpendiculaires *AC* & *GH*; les triangles *EGH* & *BAC* ſont ſemblables étant rectangles, & l'angle *B* étant égal à l'angle *E*; donc *BC. AC :: EH. GH* [c].



Les deux triangles *DAC* & *FGH* étant auſſi ſemblables: donc pareillement *CD. AC :: FH. GH*; ainſi $BC + CD. AC :: EH + HF. GH$ [d]. Soit $AC = b$ & $BD = d$, $GH = m$ & $EF = n$; ainſi *b. d :: m. n*: & *alternando*, *b. m :: d. n* [e]. La ſurface de *ABD* eſt la moitié de bd [f], & celle de *GEF* eſt la moitié de mn; mais la raiſon de bd à mn eſt compoſée des deux raiſons de *b* à *m*, & de *d* à *n* [g]. Or ces deux raiſons ſont les mêmes: donc, ſelon la Définition

a L. 3. n. 19. b L. 3. n. 57. c *ſup.* n. 10. d L. 3. n. 63. e L. 3. n. 46. f L. 2. n. 135. g L. 3. n. 77.

tion de la raiſon doublée*, la raiſon de $b\,d$ à $m\,n$ eſt doublée.

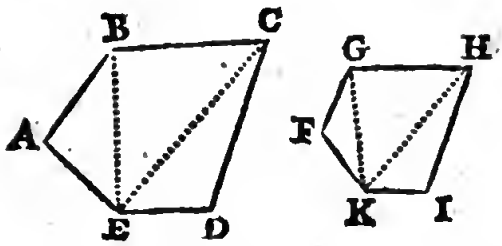
Soient deux parallelogrammes $B\,D\,M\,N$ & $E\,E\,K\,I$ ſemblables, par les mêmes raiſonnemens on prouvera que $b.d :: m.n$, & $b.m :: d.n$; $b\,d$ eſt la ſurface de $B\,D\,M\,N$, & $m\,n$ celle de $E\,F\,K\,I$. La raiſon de $b\,d$ à $m\,n$ eſt compoſée des deux raiſons de b à m & de d à n. Ces deux raiſons ſont égales; cette raiſon compoſée eſt donc doublée.

LEMME.

72 *Les figures polygones ſemblables peuvent chacune être diviſées en égale quantité de triangles ſemblables, chacun au ſien.*

Soient deux figures ſemblables $A\,B\,C\,D\,E$, $F\,G\,H\,I\,K$; je dis qu'elles peuvent être diviſées en une égale quantité de triangles chacun ſemblable à celui qui lui répond. Car 1°. puiſque les figures ſont ſemblables, elles auront un égal nombre de côtez, & les angles qu'ils comprendront ſeront égaux par la Définition †; ainſi d'un des angles égaux, comme de E & K, on peut mener des lignes aux autres angles qui diviſent ces figures dans une égale quantité de triangles ‡. 2°. Tous les triangles d'une figure ſeront ſemblables à ceux de l'autre, chacun à celui qui lui répond; ainſi le triangle $A\,B\,E$ ſera ſemblable au triangle $F\,G\,K$, qui lui répond: car par la ſuppoſition l'angle $E\,A\,B = K\,F\,G$: & les côtez qui les comprennent ſont proportionnels, c'eſt-à-dire, que $E\,A.\ A\,B :: K\,F.\ F\,G$; & partant ces deux triangles ſont ſemblables ‡. Il en ſera de même des autres triangles, dont les angles compris

*L. 3. n. 72. †*Sup.* n. 38. ‡ *L.* 2. n. 122. ‡ *Sup.* n. 13.



pris par les côtez homologues ſont égaux, ſoit qu'ils ſoient formez par les côtez des figures, ou qu'ils ſoient leurs réſidus en ayant ôté les égaux qui les touchent aux points *E* & *K*, tels que *BEC* & *GKH*. Donc, &c. ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XVI.

Toutes les figures rectilignes ſemblables, ſont entre elles comme les quarrez de leurs côtez homologues. 73

Suppoſant les mêmes choſes & la même figure du Lemme précédent. 1°. chacune de ces figures ſe peut diviſer en un égal nombre de triangles ſemblables entre eux, chacun au ſien, par le précédent Lemme. 2°. Chacun des triangles d'une figure ſera à chacun autre de l'autre figure qui lui répond, en raiſon doublée de chaques côtez homologues, par le Théorême précédent *, c'eſt-à-dire, en raiſon doublée de *AE* à *FK*, ou *AB* à *FG*; mais le quarré de *AE* eſt à celui de *FK*, en raiſon doublée de *AE* à *FK* †: & il en eſt de même de tous les autres triangles qui compoſent ces deux figures, dont à cauſe de leur ſimilitude tous les côtez gardent la même proportion. Partant comme chaque triangle de l'une eſt à

* *Sup.* n. 71. † *Lib.* 3. n. 60.

ſon ſemblable dans l'autre, ainſi tous les triangles de l'une à tous les triangles de l'autre *, c'eſt-à-dire, la premiere figure à la deuxieme, comme le quarré du côté *AE* à celui de *IK*: Et il en eſt de même de tout autre qu'on voudra choiſir. Donc, &c. ce qu'il falloit conclure.

Corollaire.

74 *Si quatre lignes ſont proportionnelles, les figures ſemblables décrites ſur ces lignes ſont proportionnelles: & ſi ces figures ſemblables ſont proportionnelles, ces quatre lignes ſont proportionnelles.* Eucl. VI. Prop. 22.

Soient quatre lignes proportionnelles *a. b* : : *c. d*, ſur leſquelles ſoient décrites quatre figures ſemblables *V*, *X*, *Y*, *Z* par le Théorême précédent *V. X* : : *aa. bb*, & *Y. Z* : : *cc. dd*. Mais *aa. bb* : : *cc. dd* †. Donc *V. X* : : *Y. Z*

Et ſi cela eſt, *a. b* : : *c. d*. Car les raiſons doublées égales ſont compoſées de raiſons égales; ainſi ſi *aa. bb* : : *cc. dd*, il faut que *a. b* : : *c. d*.

Theoreme XVII.

75 *Les triangles & les parallelogrammes de même hauteur, ſont entre eux en même raiſon que leurs baſes.*

Soient *Z* & *X*, ou deux triangles ou deux parallelogrammes, ayant la même hauteur que je nomme *a*; la baſe de *Z* eſt *b*, & celle de *X* eſt *d*. La ſurface de *Z* eſt *ab*, ſi c'eſt un parallelogramme; mais ſeulement la moitié, ſi c'eſt un triangle ‡: *ad* eſt auſſi la ſurface de *X*; ou ſi c'eſt un triangle, ſeulement la moitié. Or *ab*. *ad*

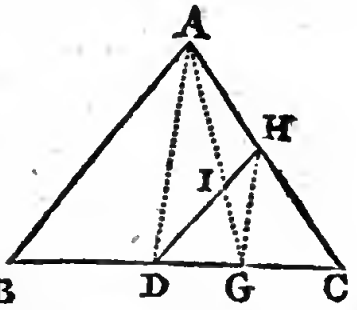
* *L.* 3. *n.* 50. † *L.* 3. *n.* 84. ‡ *L.* 2. *n.* 133.

a d:: *b*. *d**. Donc *Z* & *X* ſont entre eux, comme leurs baſes.

Probleme I.

Un point étant donné dans un des côtez d'un triangle, mener une ligne par ce point qui le diviſe, ſelon une raiſon donnée. 76

Soit *ABC* un triangle qu'il faut partager, en menant une ligne droite par le point *D*, ſelon une raiſon donnée. Soit cette raiſon celle de *BG* à *GC*. Si le point *D* & *G* étoient un même point, il faudroit mener de *D* à *A* une ligne: car *BAD* & *DAC* ſont entre eux comme *BD* & *DC* †. Ainſi ce qu'on propoſe ſeroit fait. Si *G* & *D* ſont deux differens points, je mene *GH* parallelement à *AD* & de *D* à *H*, où cette parallele coupe *AC*, une autre ligne, ſavoir *DH*; il faut prouver qu'elle partage le triangle *ABC*, ſelon la raiſon de *BG* à *GC*.



Les deux triangles *BAG* & *GAC* ſont entre eux comme *BG* à *GC* ‡. Il n'eſt donc queſtion que de prouver, que *DHC* = *AGC*, & *DBAH* = *BAG*; ainſi que *DHC*. *AGC* :: *DBAH*. *BAG*. Les deux triangles *GAI* & *GHD* entre mêmes paralleles ſur la même baſe *GH* ſont égaux ‡. Donc *GHC* + *CDH*, ou *DHC* = *GHC* + *GAH*, ou *GAC*. Reſte à prouver que *ABDH* = *ABG*; ce qui eſt facile: car par la même raiſon qui vient d'être dite, le triangle *ADG* eſt égal à celui de *AHD*;

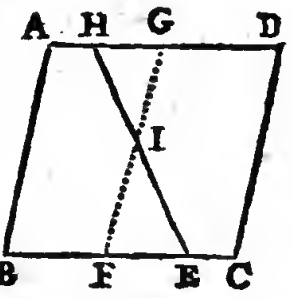
* *L.* 3. *n.* 54. † *ſup. n.* 75. ‡ *ſup. n.* 75. ‡ *L.* 2. *n.* 134.

AHD; ainſi les ajoutant chacun au triangle *ABD*, on aura *ABDH* = *ABG*: & partant *ABDH*. *DHC*:: *ABG*. *ABC*. On a donc fait ce qu'il falloit faire.

PROBLEME II.

77 *Partager un Parallelogramme ſelon une raiſon donnée, en menant une ligne par un point donné.*

Soit *ABCD* un parallelogramme. Il le faut couper ſelon la raiſon de *BF* à *FC*, menant une ligne par *E* un point donné.



1°. Je mene *FG* parallele à *AB*, ou à *CD*. Ces deux portions *ABFG* & *CDGF* ſont entre elles, comme *BF* eſt à *FC*, ſelon le dernier Theorême [a].

2°. Je prens *CH* égal à *FE*, & ayant mené de *E* à *H* une ligne droite, je dis que *ABEH* & *ECDH* ſont les portions que l'on cherche: car *HGI* & *EFI* ſont deux triangles ſemblables; puiſqu'ils ſont équiangles: car les angles au point *I* ſont égaux [b], & les autres angles ſont pareillement égaux, étant alternes entre les paralleles [c]; ainſi ces triangles ayant les côtez *EF* & *GH* égaux, ſont entierement égaux [d]. Partant *ABFIH* + *ABFG* − *HGI*; & ajoutant de part & d'autre la valeur de *HGI* égal *FIE*, on aura *ABFIH* + *FEI* = *ABFG*: ce qu'il falloit démontrer. On prouvera de la même maniere *CDHE* = *CDGF*.

THEO-

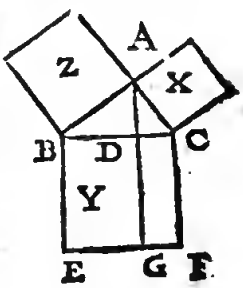
a *Sup. n.* 75. b *L.* 2. *n.* 21. c *L.* 2. *n.* 25. d *L.* 2. *n.* 96.

THEOREME XVIII.

Dans un triangle rectangle le quarré de l'hypothénuſe eſt égal aux quarrez des deux autres côtez. Eucl. I. Prop. 47. 78

Autre Démonſtration que celle qu'on a donnée au Livre II. n. 142.

ABC eſt un triangle rectangle. L'angle droit eſt *A*, & *BC* l'hypothénuſe.



Il faut prouver que $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; & d'une autre maniere que nous n'avons fait [a].

J'abaiſſe de l'angle droit *A*, la perpendiculaire *AD*; que je prolonge. Selon ce qui a été prouvé [b], $\div BC.BA.BD$: donc [c] $\overline{AB}^2 = BC \times BD$, ou $BE \times BD$ puiſque $BC = BE$, à cauſe du quarré.

De même $\div BC.AC.CD$; donc $\overline{AC}^2 = BC \times CD$, ou $CF \times CD$ puiſque $CF = CB$. Or $\overline{BC}^2 = BE \times BD + CF \times CD$ [d]: donc $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE I.

Dans les triangles rectangles, quelque figure que ce ſoit, faite ſur l'hypothenuſe, eſt égale aux figures ſemblables & poſées de la même maniere ſur les deux autres côtez. Eucl. VI. Prop. 31. 79

Soient ſur les côtez *BD. DA. AB* trois figures *X. Y. Z* ſemblables, *X* ſoit ſur l'hypothé-

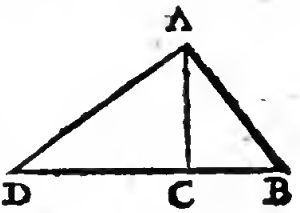
a *L.* 2. *n.* 142. b *ſup. n.* 28. c *L.* 3. *n.* 57. d *L.* 3. *n.* 18.

thénuſe. Ces figures ſont entre elles comme $\overline{BD}^2$, $\overline{AD}^2$, $\overline{AB}^2$ [a]. Or $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2$ par ce Theorême: donc $X = Y + Z$.

Corollaire II.

80 *Dans un triangle rectangle ayant mené de l'angle droit une perpendiculaire ſur l'hypothénuſe, les quarrez faits ſur les deux autres côtez ſont entre eux comme les parties de l'hypothénuſe.*

Soit ABD un triangle rectangle, dont DB eſt l'hypothénuſe, ſur laquelle de l'angle droit A tombe la perpendiculaire AC. Il faut prouver que $\overline{AD}^2 . \overline{AB}^2 :: DC . CB$, puiſque $\div DB . DA . DC$ [b]; Donc $DB \times DC = \overline{DA}^2$ [c]. Par la même raiſon $\div DB . BA . BC$; donc auſſi $DB \times CB = \overline{BA}^2$. Partant $DB \times DC . DB \times BC :: \overline{AD}^2 . \overline{AB}^2$: mais $DB \times DC . DB \times BC :: DC . CB$ [d]: ainſi, $\overline{AD}^2 . \overline{AB}^2 :: DC . CB$; ce qu'il falloit démontrer.

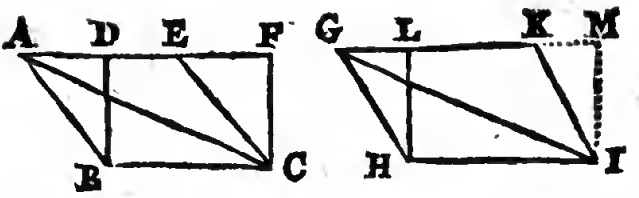


Theoreme XIX.

81 *Les parallelogrammes qui ont un angle commun ou égal, ſont en raiſon compoſée des côtez qui le comprennent.* Eucl. VI. Prop. 23.

L'angle ABC eſt égal à l'angle GHI Je dis que ces deux parallelogrammes ſont en raiſon compoſée de AB à GH, & de BC à HI. Ces parallelogrammes $ABCE$ & $GHIK$ ſont égaux aux

a *ſup. n. 73.* b *ſup. n. 28.* c *L. 3. n. 57.* d *L. 3. n. 54.*



aux rectangles *BDFC* & *HLMI* chacun au ſien [a], leſquels ſont en raiſon compoſée de *BD* à *HL* & de celle de *BC* à *HI* [b]. Or la raiſon de *DB* à *HL* eſt la même que celle de *AB* à *GH*, les deux triangles *ABD* & *GHL* étant ſemblables. Car, 1°. ils ſont rectangles. 2° Les angles *ABC* & *GHI* étant égaux, ſi on ôte les angles droits *DBC* & *LHI*, les reſtes *ABD* & *GHL* ſont égaux; ainſi ils ſont équiangles [c]. Et partant ils ont les côtez proportionnels [d].

Corollaire I.

Lorſque deux parallelogrammes égaux ont un angle commun ou égal, les côtez qui le comprennent, ſont en raiſon réciproque. Eucl. VI. Prop. 14. 82

Si les parallelogrammes *ABCE* & *GHIK* ſont égaux entre eux, *fig. ci-deſſus*: je dis que *AB. BC. GH. HI* ſont en raiſon réciproque; c'eſt-à-dire, que *AB. GH:: HI. BC.*

Puiſque $BD \times BC = HL \times HI$. Donc [e] *BD. HL:: HI. BC.* Or puiſque par la ſuppoſition les angles *ABC* & *GHI* ſont égaux; on conclura [f] que *AB. GH:: BD. HL:: HI. BC*; & partant *AB. GH:: HI. BC* [g]; ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire II.

Si deux triangles ont une ſurface égale, & un angle commun ou égal, les côtez qui comprennent 83

cet

a *L.* 2. *n.* 129. b *L.* 3. *n.* 77. c *L.* 2. *n.* 80. d *ſup. n.* 10. e *L.* 3. *n.* 58. f *ſup. n.* 7. g *L.* 3. *n.* 53.

cet angle ſont en raiſon réciproque. Eucl. VI. Prop. 15. (*même fig.*)

Soient deux triangles *ABC* & *GHI* dont les ſurfaces ſont égales, & les angles *ABC* & *GAI* égaux. Il faut démontrer que *AB. GH:: HI. BC.* Ces triangles ſont moitiez des parallelogrammes *AB D* & *GHIK*, dont on vient de prouver que *AB. GH:: HI. BC*; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME III.

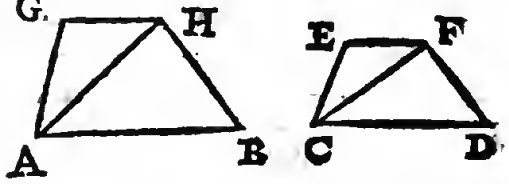
84 *Trouver un quarré égal à un rectangle donné.*

Soit *bd* le rectangle donné. Il faut chercher une moyenne proportionnelle entre *b* & *d* [a]. Si c'eſt *x*, donc $\div b.x::x.d$ & $bd=xx$ [b]. Ainſi on a trouvé un quarré égal à un rectangle donné.

PROBLEME IV.

85 *Sur une ligne droite donnée décrire une figure rectiligne ſemblable à une figure rectiligne donnée, & ſemblablement poſée à la figure rectiligne donnée.* Eucl. VI. Prop. 28.

Soit *AB* une ligne droite, ſur laquelle il faut faire une figure ſemblable au rectiligne *CDFE*, & ſemblablement poſée.



Je réſous *CDEF* en deux triangles, ſuivant que le nombre de ſes côtez l'exige [c] ſur *AB*; je fais *ABH*, triangle ſemblable au triangle *CDF* [d], & ſur *AH* le triangle *AGH* ſemblable à *CEF*, & ainſi de ſuite, s'il y a plus de triangles. Ces triangles ſemblables ont leurs côtez proportion-

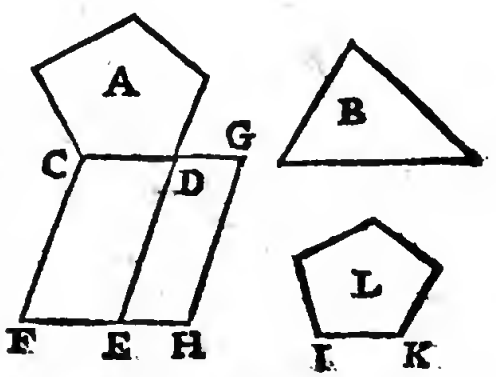
a *Sup. n.* 89. b *L.* 3. *n.* 57. c *L.* 2. *n.* 122. d *L.* 2. *n.* 97.

tionnels [a]; mais comme ils forment ou composent ces deux figures, elles auront donc aussi leurs angles égaux, & leurs côtez homologues proportionnels. Ainsi *AB AG*:: *DC. C*[illegible], & conséquemment ces figures seront semblables [b]; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME V.

Deux figures rectilignes étant données, en décrire une troisieme semblable à l'une & égale à l'autre. Eucl. VI. Prop. 25. 86

La Rectiligne donnée est *A*; il en faut faire une qui lui soit semblable & égale à *B*, autre Rectiligne donnée.



Sur *CD* je fais le Parallelogramme *CE* égal à *A* [c], & de la même maniere sur *DE* le Parallelogramme *DH* égal à *B* ayant l'angle donné *D*, ensuite je trouve *IK* moyenne proportionnelle entre *CD* & *DG* [d] sur *IK*, je fais *L* semblable à *A* [e]; je dis que *L* est la figure demandée. Il faut prouver que *L* est égal à *B*.

A & *L* étant semblables par la construction, elles sont l'une à l'autre comme $\overline{CD}^2$ à $\overline{IK}^2$ [f], c'est-à-dire, en raison doublée de *CD* à *IK* [g]; mais par l'hypothese $\div\div$ *CD. IK. DG*: ainsi *CD* est à *DG* aussi en raison doublée de *CD* à

a *sup. n.* 10. b *sup. n.* 38. c *L.* 2. *n.* 139. & 140. d *sup. n.* 29. e *sup. n.* 85. f *sup. n.* 73. g *L.* 3. *n.* 80.

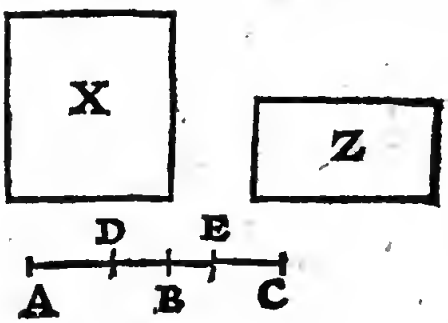
à IK *, & par conſéquent $CD. DG :: A. L$; mais auſſi $CD. DG :: CE. DH$ †. Et par la conſtruction $CE = A$ & $DH = B$: donc $CD. DG :: \left\{\frac{A. B.}{A. L.}\right.$ Partant $B = L$ ‡; ce qu'il falloit démontrer.

Remarquez que cette conſtruction ſe feroit plus facilement, ſi au-lieu du Parallelogramme CE *indifferent, on avoit fait un Rectangle.*

THEOREME XX.

87 *Un quarré de même circuit qu'un parallelogramme rectangle, eſt plus grand que ce parallelogramme de la valeur du quarré de la moitié de la difference, qui eſt entre les côtez de ce parallelogramme.*

X eſt un quarré, & Z un parallelogramme de même circuit. AC eſt la ſomme des deux côtez, tant de X que de Z. La moitié de AC, qui eſt AB, eſt le côté du quarré X. AE eſt le grand côté de Z, & EC le petit. Soit AB ou $BC = b$, & $BE = a$ & qu'on prenne $BD = a$: donc AE le grand côté de Z ſera $b + a$, & le moindre EC ou AD ſera $b - a$; leur difference ſera donc $2a$, le quarré X ſera donc égal à bb, & le rectangle Z égal au produit de $b + a \times b - a$, c'eſt-à-dire, à $bb - ab + ab - aa$ ou $bb - aa$; par conſéquent la difference de X & de Z eſt aa,



* *L. 3. n. 72.* † *ſup. n. 75.* ‡ *L. 3. n. 52.*

$\frac{aa}{4}$, quarré de la moitié de la difference des côtez; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XXI.

De deux Polygones réguliers de même circuit, celui qui a plus de côtez a une plus grande surface. 88

Un polygone eſt égal à un triangle, qui a pour baſe ſon circuit, & pour hauteur ſon apothême [a]. Soient donc deux polygones de même circuit; je nomme x la moitié de leur circuit, l'apothême de celui qui a plus de côtez ſoit b, celui de l'autre ſoit d; voila donc [b] leur ſurface xb, & xd. Or $xb.xd::b.d$ [c], & $b > d$ [d]: donc xb ſera plus grand que xd.

COROLLAIRE.

De toutes les figures iſoperimetres, c'eſt-à-dire, de même circuit, le cercle eſt la plus capable. 89

Car, 1°. un quarré eſt plus grand qu'un parallelogramme de même circuit [e]. Le quarré eſt un polygone, & par conſéquent le cercle, conſideré comme un polygone d'un nombre infini de côtez, a un plus grand apothême que lui, ainſi une plus grande ſurface. Il en eſt de même des autres polygones.

THEOREME XXII.

Les Polygones réguliers & ſemblables, ſont en raiſon doublée de celles de leurs côtez. Eucl. VI. Prop. 20. 90

Soient X & Z deux polygones ſemblables; ils ſont égaux à deux triangles ſemblables [f]: & ſi a eſt la moitié du circuit de, X & b ſon apothême, & c la moitié du circuit de, Z & d ſon

a *L.* 2. *n.* 145. b *L.* 2. *n.* 135. c *L.* 3. *n.* 54.
d *ſup. n.* 48. e *ſup. n.* 87. f *L.* 2. *n.* 145.

ſon apothême, $ab = X$ & $cd = Z$. Or ab eſt à cd en raiſon doublée de celle de a à c, ou de celle de b à d *, puiſqu'elle eſt égale par l'hypotheſe, ces figures étant ſemblables.

Corollaire.

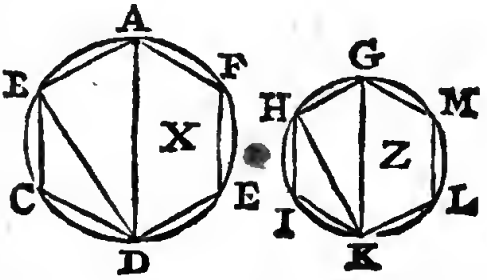
91 *Donc la ſurface d'un cercle eſt à celle d'un autre cercle en raiſon doublée de ſon circuit, ou de ſon diametre.*

Car ce ſont deux polygones ſemblables d'un nombre infini de côtez.

Theoreme XXIII.

92 *Les Polygones réguliers & ſemblables, ſont entre eux comme les quarrez des diametres des cercles où ils ſont inſcrits.* Eucl. XII. Prop. 1.

Soient deux polygones X & Z inſcrits dans deux cercles, il faut démontrer qu'ils ſont entre eux comme les quarrez de leurs diametres AD, & GK.



Puiſque X & Z ſont polygones ſemblables, ils ſeront l'un à l'autre en raiſon doublée du côté AB au côté GH, par le Theorême précédent; mais à cauſe de cette ſimilitude, les triangles ABD, GHK ſont auſſi ſemblables: car tous leurs angles ſont égaux étant, appuyez ſur ſemblables circonferences †. Donc les côtez homologues ſeront proportionnels ‡, & partant $AB. GH:: AD. GK$; ainſi la raiſon doublée

* *ſup. n. 71.* † *L. 2. n. 39.* ‡ *ſup. n. 10.*

blée de *AB* à *GH* ſera la même que la doublée de *AD* à *GK*. Donc le Polygone *X* ſera au Polygone *Z* en raiſon doublée du diametre *AD* à *GK*, c'eſt-à-dire, comme le quarré *AD* au quarré de *GK**; ce qu'il falloit démontrer.

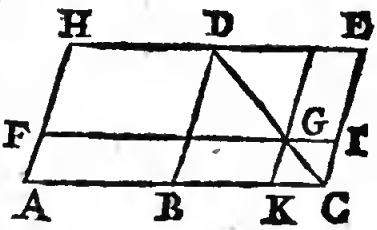
Corollaire.

Donc puiſque les Cercles peuvent être pris pour des Polygones, leurs ſurfaces ſont entre elles comme les quarrez de leurs diametres. Eucl. XII. Prop. 2. 93

Theoreme XXIV.

AB=BC; *le Parallelogramme* ABDH *ſera plus grand que le Rectangle* AFGK, *& que quelque autre dont le point* G *ſera dans la diagonale* DC. Eucl. VI. Prop. 27. 94

BG=GE†: donc *BG+GC=GE+GC*, c'eſt-à-dire, que *BI=KE*. Or *BF=BI*, puiſque *AB=BC*. Donc *BF+BG*, ou *AG=BG+KE*. Or *BG+KE* eſt plus petit que *BE*, ou *AD* ſon égal. Donc *AG* eſt plus petit que *AD*.



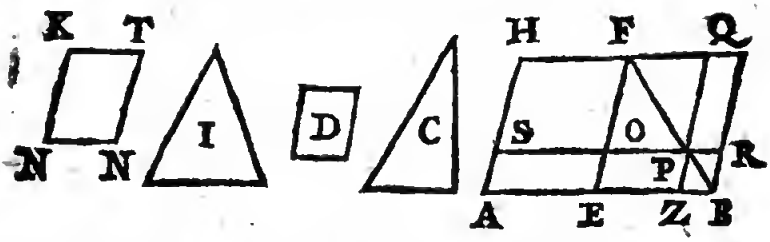
Probleme VI.

Appliquer à AB, *ligne donnée, un Parallelogramme égal à* C, *défaillant d'un Parallelogramme ſemblable à* D. 95

C *ne doit pas être plus grand qu'un Parallelogramme fait ſemblable à* D, *& appliqué à la moitié de* AB, *c'eſt-à-dire, plus grand que* AF *ou* EG. Eucl. VI. Prop. 28.

Cou-

* *L. 3. n. 80.* † *L. 2. n. 132.*



Coupez *AB* également au point *E*, ſur *EB* faites le parallelogramme *EG* ſemblable à celui *D* [a], lequel ſera plus grand que *C* ſuivant la requiſition; que cet excès ſoit de la figure *I*; ſoit fait le parallelogramme *NT* égal à *I*, & ſemblable à *D* ou *EG* par le Problême [b], ſoit menée la diagonale *FB*, & ſoit fait *FO* = *KN* & *FQ* = *KT*; par *O* & *Q* ſoient menées les paralleles *SR* & *QZ*: le parallelogramme *AP* eſt ce qu'on cherche.

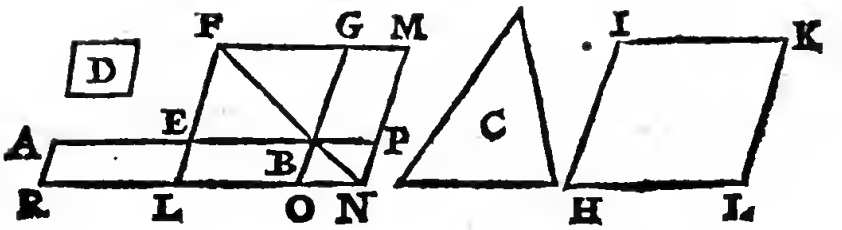
Car ces parallelogrammes *D*, *EG*, *OQ*, *NT*, *ZR* ſont ſemblables entre eux, & *EG* = *NT* + *C* = *OQ* + *C*; par conſéquent *C* eſt égal au gnomon *OPQ* = *AO* + *PG* = *AO* + *EP* = *AP*; ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME VII.

96 *A* AB *une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à* C, *qui excede d'un parallelogramme ſemblable à* D. Eucl. VI. Prop. 29.

Soit coupée également *AB* en *E*; ſur *EB* ſoit fait *EG* ſemblable à *D* [c]; enſuite au moyen des Problêmes [d] ſoit trouvé *HK* égal à *EG* + *C* & ſemblable à *D* ou à *EG*. Je prolonge *FE* & *FG*, de ſorte que *FL* = *IH* & *FM* = *IK*. Je mene par *L* & *M* les paralleles *RN*, *MN*

a *ſup. n.* 85. b *ſup. n.* 86. c *ſup. n.* 85.
d *L.* 2. *n.* 139. & *ſup. n.* 86.



M N & *A R*; je prolonge *A B* & *G B*; je mene le diametre *F B N*, & *A N* eſt le parallelogramme qu'on cherche.

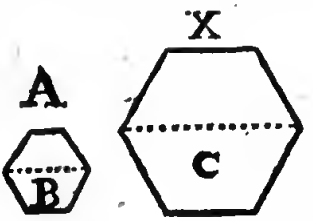
Car ces quatre parallelogrammes *D*. *H K*, *L M*. *E G* ſont ſemblables par la conſtruction; donc *O P* eſt ſemblable à *L M*, ou à *D* *.

De même *L M* = *H K*, par la conſtruction; ainſi *L M* = *H K* = *E G* + *C*: donc *L M* = *E G* + *C*: donc *L M* − *E G* = *C*. Or *L M* − *E G* eſt égal à *B M* + *L B* + *B N*, ou égal à *B L* + *A L* + *B N*; car *A E* = *E B* par l'hypotheſe: donc *C* = *B L* + *A L* + *B N* ou *C* = *A N*; ce qu'il falloit démontrer.

Probleme VIII.

A une figure rectiligne donnée, en trouver une autre ſemblable en raiſon donnée. 97

Soit *A* une figure donnée. On demande la figure *X*, à laquelle la ſurface de *A* ait une raiſon donnée, comme par exemple de 5 à 1.



Ces figures, ſuppoſées ſemblables, doivent être entre elles comme les quarrez de leurs côtez homologues †, c'eſt-à-dire, en raiſon doublée deſdits côtez ‡, ou même

L me

* *ſup. n.* 51. † *ſup. n.* 73. ‡ *L.* 3. *n.* 80.

me de quelque autre ligne, corde, ou diametre homologue qui en joint les angles comme *B* & *C*. Il faut donc pour cela, entre le diametre *B* & une autre ligne *D*, à laquelle il ſoit comme 5 à 1, trouver une moyenne proportionnelle *C* [a]; de ſorte que $\frac{1}{5}B.C.D$, & ſur cette ligne *C* décrire la figure *X* ſemblable à *A* [b], ces deux figures *A* & *X* ſont entre elles comme les quarrez de *B* & *C* [c], ou en raiſon doublée de *B* à *C*, c'eſt-à-dire, comme *B* à *D*, ou 5 à 1: ce qu'il falloit faire.

Corollaire I.

98 *Donc il eſt facile de trouver une figure ſemblable à une donnée, & moindre qu'une autre d'une certaine figure donnée.*

Car il n'y a qu'à la ligne *B*, côté de la figure donnée, en prendre une autre *D* qui lui ſoit dans la proportion requiſe, & entre elles trouver, ſuivant ce qui a été enſeigné [d], la moyenne proportionnelle *C*, & ſur icelle comme côté décrire une figure ſemblable à la donnée [e], laquelle ſera la cherchée, ſuivant ce Problême.

Corollaire II.

99 *Il eſt également facile de trouver une figure ſemblable à une donnée, & plus grande qu'une autre d'une certaine figure donnée.*

C'eſt une ſemblable conſtruction que la précédente.

SEC-

a *ſup.* n. 29. b *ſup.* n. 95. c *ſup.* n. 73.
d *ſup.* n. 29. e *ſup.* n. 8.

SECTION V.

De la Commenſurabilité ou Incommenſurabilité des Lignes & des Surfaces.

100 *LEs grandeurs ſont dites Commenſurables, lorſqu'elles peuvent être meſurées par une troiſieme, qui eſt ainſi leur commune meſure.*

La commune meſure d'une toiſe & d'un pié, c'eſt le pouce, qui ſe trouve exactement douze fois dans un pié, & ſoixante-douze fois dans une toiſe.

DEFINITION II.

101 *Les grandeurs Incommenſurables, ſont celles qui ne peuvent être meſurées par aucune commune meſure.*

Une hauteur de ſept piés ne peut être meſurée exactement par une toiſe; mais elle le peut être par une meſure plus petite, comme par un pié & par un pouce. Ainſi deux grandeurs ne ſont incommenſurables que lorſqu'on ne peut trouver de meſure, pour petite qu'elle ſoit, qui les puiſſe meſurer préciſément.

COROLLAIRE.

102 *Donc deux grandeurs qui ont un rapport infini, ſont incommenſurables entre elles.*

Car ſi elles étoient commenſurables, leur commune meſure détermineroit leur rapport. Celui du point à la ligne eſt infini; car on ne peut point déterminer en quelque ligne que ce ſoit, combien il y a de points, puiſqu'on la

peut diviſer à l'infini. De même entre une ligne & une ſurface le rapport eſt infini ; car dans une ſurface on y concevra tant de lignes qu'on voudra, comme dans un ſolide des ſurfaces.

DEFINITION III.

103 *L'on appelle Rationnelle, une grandeur connue & déterminée, par rapport à une autre dont la valeur ſe peut exprimer par nombre.*

Grandeur Rationnelle eſt celle à laquelle on rapporte toutes les autres, & ſur laquelle on raiſonne ; ainſi on la ſuppoſe connue.

DEFINITION IV.

104 *Deux grandeurs qui ne ſont pas commenſurables en elles-mêmes, le ſont en puiſſance, ſi leurs quarrez ou leurs cubes ſont commenſurables.*

Si b & c ſont incommenſurables, mais que leurs quarrez ſoient commenſurables, que par exemple bb ſoit à cc comme 3 à 5, alors b & c incommenſurables en eux-mêmes, ſont commenſurables en ſeconde puiſſance. Si x & z n'étoient pas commenſurables ni leurs quarrez xx & zz, mais que leurs cubes xxx & zzz ou x^3, z^3 le fuſſent: par exemple, que x^3 fût à z^3 comme 10 à 13, alors x & z incommenſurables en eux-mêmes & en ſeconde puiſſance, ſeroient commenſurables en troiſieme puiſſance.

DEFINITION V.

105 *Nombre quarré, c'eſt le produit d'un nombre multiplié par lui-même.*

Ainſi 9 eſt un nombre quarré, parce que c'eſt le produit de 3 multiplié par 3, qui en eſt la racine.

DE-

DEFINITION VI.

Nombre cube, c'eſt le produit d'un nombre quarré multiplié par la racine de ce quarré, c'eſt-à-dire, par le nombre qui l'a produit. 106

Ainſi 8 eſt un nombre cube fait de 4 nombre quarré multiplié par 2 racine de ce quarré, c'eſt-à-dire, de 2, qui multiplié par lui-même, a fait ce quarré 4.

DEFINITION VII.

Nombre non quarré, c'eſt celui dont la racine quarrée ne ſe peut exprimer par aucun nombre. 107

DEFINITION VIII.

Nombre non cube, c'eſt celui dont la racine cube ne ſe peut exprimer par aucun nombre. 108

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 ſont des nombres qui n'ont point de racine quarrée qui ſe puiſſe exprimer par des nombres; car on ne peut point trouver aucun nombre, qui multiplié par lui-même, faſſe ou 2, ou 3, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 10, &c. Ces nombres, à la reſerve de 8, ne ſont point auſſi des nombres cubes, car il n'y a aucun nombre, qui multiplié cubiquement, les puiſſe produire.

DEFINITION IX.

Nombres expoſans d'une raiſon, ſont les plus petits nombres qui l'expriment. 109

Ainſi ſi x eſt à z comme 6 à 12, les expoſans de la raiſon de x à z ſeront 1 & 2, qui ſont les plus petits nombres qui puiſſent être entre eux, comme 6 & 12.

Lorſqu'on joint deux grandeurs qui ne ſont pas commenſurables, & à qui par conſéquent on ne peut pas donner le même nom, ou que l'on eſt obli-

gé d'exprimer par deux noms differens, cela s'appelle un Binome. *Lorſque d'une grandeur on en retranche une autre qui lui eſt incommenſurable, & qu'ainſi on ne les peut exprimer avec un ſeul ſigne, c'eſt bien un* Binome; *mais pour diſtinguer cela de ce qui ſe fait quand on joint deux grandeurs incommenſurables, on l'appelle* Apotome, *ou Réſidu, ou Grandeur diminuée. Je n'expliquerai point ici les termes, que j'ai déja expliqué dans les Elémens de Mathématiques.*

PROPOSITIONS EVIDENTES.

Proposition I.

110 *Deux nombres ſont toujours commenſurables entre eux, car ils ont au moins l'unité pour leur commune meſure.*

Par exemple, dans ces deux nombres 77 & 81, comme dans tous les autres, l'unité s'y trouve préciſément tant de fois, ainſi elle en eſt la meſure commune.

Proposition II.

111 *Lorſque d'un nombre on en retranche un autre, le reſte eſt un nombre.*

Car il reſte une ou pluſieurs unitez.

Proposition III.

112 *Les lignes & les ſurfaces qui ſont comme nombre à nombre, ſont commenſurables; & celles qui ſont incommenſurables ne ſont pas comme nombre à nombre.*

C'eſt une ſuite des Définitions précédentes.

Proposition IV.

113 *Deux grandeurs commenſurables à une troiſieme, ſont commenſurables entre elles.*

Car

Car ſi *B* & *Z* ſont commenſurables, on peut exprimer avec des nombres leur rapport. Si *C* & *Z* ſont pareillement commenſurables, on exprimera leur rapport avec des nombres; ainſi toutes ces trois grandeurs ſe marqueront avec des nombres: partant elles ſont commenſurables.

PROPOSITION V.

Une ligne, racine ou côté d'un quarré qui n'eſt pas un nombre quarré, n'eſt pas rationnelle. Elle le ſeroit, ſi ſon quarré étoit égal à un nombre quarré. 114

La racine d'un nombre qui n'eſt pas quarré ne ſe peut point exprimer par aucun nombre; ainſi toute ligne qui eſt égale à cette racine, ne ſe peut point marquer par aucun nombre.

PROPOSITION VI.

Si les quarrez de deux lignes ne ſont pas entre eux comme deux nombres quarrez, ces deux lignes ne ſont pas commenſurables. 115

Ces lignes ſont égales chacune à la racine d'un nombre qui n'eſt pas quatré, ainſi aucun nombre ne les peut exprimer; elles ne ſont donc pas commenſurables.

PROPOSITION VII.

Un quarré rationnel ne peut être égal à deux quarrez, dont l'un ſoit rationnel & l'autre ne le ſoit pas. 116

C'eſt ce qu'on a dit, Propoſition ſeconde*: Qu'ôtant d'un nombre un autre nombre, le reſte eſt un nombre. Ainſi ſi d'un quarré rationnel, c'eſt-à-dire, qui eſt un nombre, on ôte un quarré rationnel, c'eſt-à-dire, un nombre,

* *Sup.* n. 111.

bre, le reſte doit être un quarré rationnel ou un nombre.

PROPOSITION VIII.

117 *Une ligne commenſurable étant diviſée en deux parties, ſi l'une eſt commenſurable, l'autre le ſera auſſi.*

Car cette ligne s'exprimera par un nombre, dont ayant ôté une partie commenſurable, c'eſt-à-dire, un nombre, le reſte, ſelon la ſeconde Propoſition, ſera un nombre.

PROPOSITION IX.

118 *Si à une ligne commenſurable on en ajoute une commenſurable, le tout ſera commenſurable.*

Cela eſt évident, un nombre ajouté à un nombre fait un nombre.

PROPOSITION X.

119 *Si d'une ligne commenſurable on retranche une incommenſurable, le reſte eſt incommenſurable.*

Car ſi l'une étoit commenſurable, l'autre le ſeroit auſſi, ſelon la huitiéme Propoſition.

PROPOSITION XI.

120 *Quatre lignes étant en proportion, ſi la premiere eſt commenſurable à la ſeconde, la troiſieme le ſera à la quatrieme. Si la premiere eſt incommenſurable avec la ſeconde, la troiſieme le ſera à la quatrieme.*

Cela veut dire, que ſi la raiſon de la premiere à la ſeconde ſe peut exprimer par nombre; celle de la troiſieme à la quatrieme, qui eſt la même, ſe peut auſſi exprimer par nombre. Si la premiere raiſon ne ſe peut pas exprimer, il en eſt de même de la ſeconde raiſon.

PRO-

PROPOSITION XII.

Le quarré d'une ligne, qui eſt rationnelle, eſt un nombre quarré; ſon cube eſt auſſi un nombre cube. 121

Cela eſt évident.

THEOREME I.

Si les raiſons ſimples ſont de nombre à nombre, les raiſons doublées qui en ſont compoſées auront pour expoſans des nombres quarrez, & les raiſons triplées auront des nombres cubes. 122

Soit cette raiſon ſimple de b à d: donc la raiſon de b^2 à d^2 eſt doublée. Or b & d ſe pouvant exprimer par nombres, leur quarrez le pourront. Ainſi b^2 & d^2 ſeront égaux à des nombres quarrez; ainſi b^2 & d^2, ſeront entre eux comme des nombres quarrez. Par les mêmes raiſons, b^3 & d^3 ſeront entre eux comme des cubes.

THEOREME II.

Une raiſon ſimple eſt ſourde, ſi la raiſon qui en eſt doublée ou triplée eſt ſourde. 123

Car par le Théorême précédent, ſi cette raiſon n'étoit pas ſourde, la raiſon doublée auroit pour expoſant un nombre quarré, & la raiſon triplée un nombre cube.

THEOREME III.

Une raiſon ſimple n'eſt pas ſourde, ſi les nombres expoſans de ſa raiſon doublée ſont quarrez, & les expoſans de ſa raiſon triplée ſont des cubes; & ſi cela n'eſt pas, elle eſt ſourde. 124

Car les quarrez ſont en raiſon doublée de leurs côtez ou racines, & les nombres cubes

triplée de leur racine *; ainſi les racines des expoſans d'une raiſon doublée ou triplée, ſeront les expoſans de la raiſon ſimple; qui par conſéquent ne ſera pas ſourde. Par la même raiſon ſi ces nombres ne ſont pas quarrez ou cubes; comme leurs racines ſont les expoſans des raiſons ſimples, ces raiſons ſimples ne ſe pouvant exprimer par nombre, elles ſont ſourdes.

LEMME.

125 *Quatre lignes étant en proportion, le produit des antécédens eſt à celui des conſéquens, comme le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond terme.*

Soient $a. b :: c. d$. Il faut prouver que $ac. bd :: aa. bb$; bc produit des moyens diviſé par le premier terme eſt égal au quatrieme †; ainſi $\frac{bc}{a}$ ſe peut mettre pour d; partant $\frac{bbc}{a} = bd$. Ainſi il faut démontrer que $ac. \frac{bbc}{a} :: aa. bb$. Multipliez ac & $\frac{bbc}{a}$ par a, & vous aurez aac & bbc, & diviſez ſes produits par c, reſtera aa & bb. La même raiſon demeure toujours ‡: donc $ac. bd :: aa. bb$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME IV.

126 *Quatre lignes commenſurables étant en proportion, le rectangle ou produit des antécédens, eſt à celui des conſéquens, comme deux nombres quarrez.*

Soient ces quatre lignes commenſurables & pro-

* *L.* 2. *n.* 73. & 75. † *L.* 3. *n.* 60. ‡ *L.* 3. *n.* 54. & 55.

proportionnelles *a. b*:: *c. d*; par le Lemme précédent *ac. bd*:: *aa. bb*. Or *a* & *b* ſont ſuppoſez commenſurables; leurs quarrez ſont donc un nombre quarré: donc *ac* & *bd* ſont entre eux, comme deux nombres quarrez.

LEMME.

Six lignes étant proportionnelles, le produit des antécédens eſt à celui des conſéquens, comme le cube du premier terme eſt au cube du ſecond terme. 127

Soient *a. b*:: *c. d*:: *e. f*. Il faut prouver que *ace, bdf*:: *aaa. bbb*; $\frac{bc}{a} = d$, & $\frac{bc}{a} = f$ *:: donc $bdf = \frac{b^3ee}{aa}$. Or en multipliant *ace* & $\frac{b^3ee}{aa}$ par *aa*, & diviſant les produits de cette multiplication a^3ce & b^3ce par *ce*, après cela vient a^3, b^3, la même raiſon demeure toujours †; partant *ace. bdf*:: a^3 b^3; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME V.

Six lignes commenſurables étant en proportion, le produit des antécédens eſt à celui des conſéquens, comme deux nombres cubes. 128

Soient *a. b*:: *c. d*:: *e. f*; par le Lemme précédent, *ace. bdf*:: a^3. b^3. Or *a* & *b* étant commenſurables, ſe pourront ainſi exprimer par nombres ‡, a^3 & b^3 ſont deux nombres cubes; par conſéquent *ace* & *bdf* ſont comme deux nombres cubes.

THEOREME VI.

Si trois lignes ſont en proportion continue, & que 129

* *L.* 3. *n.* 60. † *L.* 3. *n.* 54. & 55. ‡ *ſup. n.* 103.

que la premiere ſoit à la troiſieme comme deux nombres quarrez, ces trois lignes ſeront commenſurables.

Soit cette proportion continue ∴ *a. b. c.* Si la raiſon *a* à *c* eſt de nombre quarré; je dis que la raiſon de *a* à *b* ſera une raiſon de nombre à nombre: car la raiſon de *a* à *c* eſt doublée de celle de *a* à *b*, ou comme le quarré de *a* au quarré de *b* *; & par conſéquent par le Théorême troiſieme †, cette raiſon doublée étant comme nombres quarrez, la raiſon ſimple dont elle eſt compoſée n'eſt pas ſourde.

Corollaire.

130 *En ce cas le rectangle des extrêmes & ſes côtez ſont commenſurables avec le quarré de la moyenne, & ſon côté.*

Car 1°. puiſque par la ſuppoſition ∴ *a. b. c*, il s'enſuivra *ac* = *bb* ‡; & ainſi *ac* commenſurable avec *bb*. 2°. Par le préſent Théorême, les côtez *a*, *b*, *c* ſont commenſurables.

Theoreme VII.

131 *Si trois lignes ſont en proportion, & que la premiere ſoit à la troiſieme comme deux nombres, dont le produit n'eſt pas un nombre quarré* (ou qui ait pour expoſans deux nombres qui ne ſont pas quarrez) *la moyenne ſera incommenſurable en elle-même, & commenſurable en puiſſance avec la premiere & la troiſieme.*

Soit ∴ *b. c. d*: la premiere *b* de ces trois lignes eſt à *d* la troiſieme, comme ces nombres 2 & 9, dont le produit 18 n'eſt pas un nombre quarré. Je dis que la ſeconde ligne *c* ſera incommenſurable en elle-même, & commenſurable en.

* *L. 3. n. 16.* † *ſup. n. 124.* ‡ *L. 3. n. 57.*

en puiſſance avec la premiere & la troiſieme. Son quarré *c c* eſt égal à *b d*, ou à 18 [a]. Or 18 n'étant pas un nombre quarré, ſa racine *c* ne ſe peut point exprimer par nombre, ainſi *c* eſt incommenſurable en elle-même avec *b* & *d*; mais ſa puiſſance *c c*, qui vaut 18, l'eſt avec *b* & avec *d*, c'eſt-à-dire, avec 2 & avec 9, puiſque ſa raiſon s'exprime par des nombres.

THEOREME VIII.

Si de trois lignes en proportion continue, la premiere n'eſt pas à la troiſieme comme nombre à nombre, la moyenne eſt incommenſurable avec elles, tant en elle-même qu'en puiſſance. 132

Soit cette proportion ∴ *b. c. d*, dont la premiere *b* n'eſt pas à *d* comme nombre à nombre; je dis que *c* ni ſa puiſſance *c c* ne ſont pas commenſurables avec *b* & *d*: car la raiſon de *b* à *d* eſt doublée de celle de *b* à *c*, & de *c* à *d* [b]. Cette raiſon doublée étant donc ſourde, la raiſon ſimple de *b* à *c* ou de *c* à *d* eſt donc ſourde par le Théorême ſecond [c].

Le quarré de *b* eſt au quarré de *c* comme *b* eſt à *d* [d]. Donc puiſque *b* n'eſt pas à *d* comme nombre à nombre, *b b* & *c c* ne ſont pas comme nombre à nombre; ainſi ce ſont des incommenſurables [e].

THEOREME IX.

Si de quatre lignes en proportion continue, la raiſon de la premiere à la quatrieme eſt une raiſon de nombre à nombre, qui ait pour expoſans des nombres cubes; ces quatre grandeurs ſeront commenſurables. 133

Soit ∴ *b. c. d. f.* Si *b. f* :: 1. 8, ces quatre-

a *L.* 3. *n* 57. b *L.* 3. *n.* 83. c *ſup. n.* 123.
d *L.* 3. *n.* 84. e *ſup. n.* 112.

lignes *b*, *c*, *d*. *f* ſont commenſurables: car la raiſon de *b* à *f* eſt triplée [a]. Ces deux nombres 1 & 8 ſont cubes; cette raiſon les ayant donc pour expoſans, la raiſon ſimple comme celle de cette progreſſion qui eſt entre chaque terme, ne peut être ſourde [b], ſelon le Theorême troiſieme.

THEOREME X.

134 *Si de quatre lignes en proportion continue, la raiſon de la premiere à la quatrieme a pour expoſans des nombres qui ne ſont pas cubes*, la premiere & la ſeconde *ſeront ſeulement commenſurables en puiſſances; ainſi de même de la ſeconde & de la troiſieme.*

Soit ÷÷ *b*. *c*. *d*. *f*, & que *b*. *f* :: 1. 5. La raiſon de *b* à *f* eſt triplée de celle de *b* à *c* [c]. Or 1 & 5, les expoſans de la raiſon de *b* à *f*, ne ſont pas cubes; la raiſon ſimple de *b* à *c* eſt donc une raiſon ſourde [d]: ainſi de même de la raiſon de *c* à *d*, de celle de *d* à *f*. Mais puiſque b^3. c^3 :: *b*. *f*; & par conſéquent b^3. c^3 :: 1. 5 [e]: donc *b* & *c* ſont commenſurables en puiſſance.

THEOREME XI.

135 • *Si de quatre lignes en proportion continue, la premiere n'eſt pas à la quatrieme comme nombre à nombre, la raiſon de la premiere à la ſeconde n'eſt pas de nombre à nombre.*

÷÷ *b*. *c*. *d*. *f*; la raiſon de *b* à *f* eſt triplée; donc cette raiſon triplée étant ſourde, par le Théorême ſecond, la raiſon ſimple de *b* à *c* eſt ſourde; & puiſque b^3. c^3 :: *b*. *f*, cette raiſon de *b* à *f* étant ſourde, celle de b^3 à c^3 eſt ſourde.

a *L*. 3. *n*. 83. b *ſup*. *n*. 124. c *L*. 3. *n*. 83.
d *ſup*. *n*. 124. e *L*. 3. *n*. 87.

de. Ainſi *c* n'eſt pas commenſurable en puiſſance avec *b*.

Probleme I.

Trouver une ligne qui ſoit incommenſurable en elle-même, & commenſurable en puiſſance avec une ligne connue. 136

Soit *b* une ligne; on en cherche une qui lui ſoit incommenſurable. La ligne *b* étant 2, je prends *x* une ligne égale à 3 ou à 5, ou à tout autre nombre qui ne ſoit pas quarré. Entre ces deux lignes je cherche une ligne moyenne proportionnelle, que je nomme *c*: ainſi ÷÷ *b. c. x.* Or par le Théorême ſeptieme la ligne *c* ſera incommenſurable en elle-même avec ces deux premieres lignes, & commenſurable en puiſſance *.

Probleme II.

Trouver une ligne qui ſoit incommenſurable, tant en elle-même qu'en puiſſance, avec une ligne connue & donnée. 137

Soit la ligne donnée & connue *B*, je lui cherche par le Problême précédent la ligne *D*, qui lui ſoit incommenſurable en elle-même. Après, entre *B* & *D*, ayant trouvé la ligne *C* moyenne proportionnelle; cette ligne par le Théorême huitiéme † ſera incommenſurable, tant en elle-même qu'en puiſſance avec *B*; ce qu'il falloit faire.

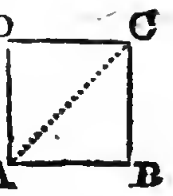
Theoreme XII.

La diagonale d'un quarré eſt incommenſurable en elle-même, & commenſurable en puiſſance avec chacun des côtez. 138

Soit le quarré *A B C D*. Il faut prouver que *AC*,

* *ſup. n.* 134. † *ſup. n.* 135.

AC, ſa diagonale, eſt en elle-même incommenſurable avec *AB*; mais qu'elle l'eſt en puiſſance.



Soit $AB = a$; puiſque $BC = AB$: donc $BC = a$: donc $aa + aa = \overline{AC}^2$[a]: donc $aa.\ \overline{AC}^2 :: 1.2$; ainſi voilà la diagonale commenſurable en puiſſance. Or 2 n'eſt pas un nombre quarré[b]: donc AC, racine de $\overline{AC}^2$ ne peut s'exprimer par nombre[c]; ainſi elle eſt incommenſurable en elle-même[d]; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XIII.

139 *Les deux parties d'une ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raiſon, ne ſont pas rationnelles.* Eucl. XIII. Prop. 6.

Soit *CB* ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raiſon au point *A*; je dis que les parties *AC* & *AB* ne ſont pas lignes rationnelles; ou, ce qui eſt la même choſe, qu'elles ne peuvent être exprimées par des nombres.

J'ajoute à *CB* la ligne *BD* moitié de *CB*, le quarré de la médiane *AB* jointe avec *BD*, vaut cinq fois le quarré de *BD*[e]; ainſi ces deux quarrez ſont comme 5 à 1. Or 5 n'eſt pas un nombre quarré: donc par le Theorême[f], la ligne $AB + BD$ n'eſt pas rationelle, mais *BD* moitié de *AB* ligne rationnelle, eſt rationnelle; il faut donc que ce ſoit la médiane *AB* qui ne ſoit pas rationnelle: & partant[g] la petite partie *AC* ſera incommenſurable; car ſi elle étoit commenſurable, *AB* le ſeroit auſſi[h].

Co-

a *ſup. n.* 78. b *ſup. n.* 106. c *ſup. n.* 114. d *ſup. n* 115.
e *ſup. n.* 66. f *ſup. n.* 114. g *ſup. n.* 119. h *ſup. n.* 127.

COROLLAIRE.

La médiane eſt incommenſurable avec la toute, tant en elle-même qu'en puiſſance. 140

Soit b une ligne coupée en moyenne & extrême raiſon, x eſt la médiane, & $b - x$ la petite, $\div b. x. b - x$. Or puiſque $b - x$ eſt une ligne non rationnelle par le Théorême préſent, donc par le Théorême huitieme * x, moyenne entre b & $b - x$, eſt incommenſurable avec b, tant en elle-même qu'en puiſſance.

SECTION VI.

Des Raiſons des Cordes avec les rayons du Cercle.

AVERTISSEMENT.

LEs Cordes d'un même Cercle ne ſont pas entre elles comme les Arcs dont elles ſont les Cordes: ces deux Arcs BED *& CFD étant égaux, l'Arc* BDC *eſt double de l'un & de l'autre. Si* BC, *corde de cet arc, étoit donc le double de la corde* BD *ou de la corde* DC, *comme l'arc* BDC *eſt le double de l'arc* BED; *alors* BC *ſeroit égal à* BD + CD; *ce qui ne peut être* †. *On ne peut donc pas ſuppoſer que les cordes d'un même cercle ſoient entre elles comme les arcs dont elles ſont les cordes.* 141

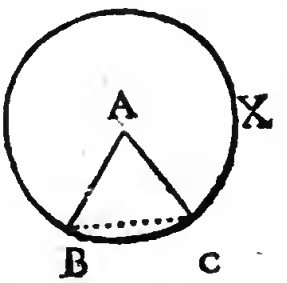
THEOREME I.

Le rayon du cercle eſt égal à la corde de ſoixante degrez. 142

L'an-

* *ſup. n.* 132. † *L. 1. n.* 12.

L'angle du centre d'un hexagone eſt de 60 degrez ſixieme partie de 360 degrez, que valent les quatre angles droits qu'on peut concevoir autour du centre. Soit donc *B A C* un angle de 60 degrez; ainſi *B C* eſt le côté de l'hexagone qu'il faut prouver égal au rayon *A B* ou *A C*. Le triangle *B A C* eſt iſoſcele; ainſi les angles ſur la baſe ſont égaux; mais celui du ſommet eſt de 60, ainſi tous deux enſemble valent 120, partant chacun 60. Ce triangle eſt donc équilateral: partant $BC = AB$, ou $BC = AC$; ce qu'il falloit prouver.



COROLLAIRE I.

143 *Un cercle étant donné faire un hexagone.* Eucl. IV. Prop. 15.

Le compas ouvert de la grandeur du rayon, je divife le cercle en ſix parties.

COROLLAIRE II.

144 *Il eſt facile de faire un triangle équilateral dans un cercle.*

Car deux parties des ſix de l'hexagone, ſont la troiſieme partie du cercle.

COROLLAIRE III.

145 *La raiſon de la circonference du cercle au rayon, eſt plus grande que* 3 *à* 1.

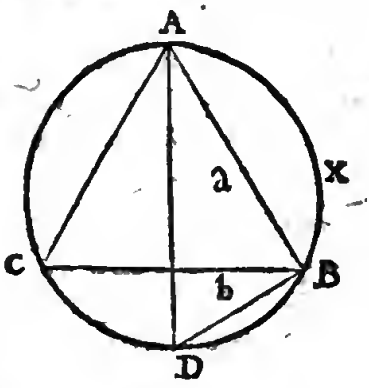
Chaque côté d'un hexagone étant égal au rayon, les ſix côtez ſeront égaux à trois fois le diametre; ainſi la circonference de ce polygone eſt au rayon du cercle où il eſt inſcrit, com-

comme 3 à 1. Or la circonference de ce cercle eſt plus grande que celle de l'hexagone, chaque portion du cercle étant plus grande que le côté de l'hexagone qui lui ſert de corde.

THEOREME II.

Le quarré d'un des côtez du triangle équilateral inſcrit dans un cercle, eſt triple du quarré du demi-diametre ou du rayon de ce cercle. Eucl. XIII. Prop. 12. 146

Soit *ABC* un triangle équilateral inſcrit dans le cercle *X*; ſoit mené le diametre *AD* qui coupe la corde *BC* perpendiculairement en deux parties égales *. Il faut prouver que le quarré de *AB* eſt triple de celui du rayon; puiſque *BC* eſt la corde du tiers du cercle, *BD* ſera la corde de la ſixieme partie, & partant égale au rayon, dont le diametre *AD* eſt le double †. Ainſi ſi $BD = b$, il faut que $AD = 2b$, & $\overline{AD}^2 = 4bb$. Soit $AB = a$; puiſque *ABD* eſt rectangle: donc $aa + bb = \overline{AD}^2$ ‡. Ainſi $aa + bb = 4bb$. Otant bb de part & d'autre, reſtera $aa = 3bb$; ce qu'il falloit démontrer.



AVERTISSEMENT.

Je ne veux pas groſſir ces Elémens de pluſieurs Théorêmes ſemblables. Il eſt évident que la tangente d'un angle de quarante-cinq degrez eſt égale 147

a

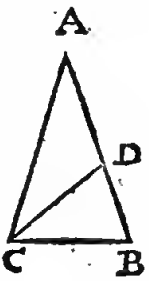
* *L. I. n. 90.* † *ſup. n. 142.* ‡ *ſup. n. 78.*

*au rayon: car elle fait avec ce rayon un triangle rectangle dont la sécante est la base, sur laquelle les angles sont égaux, savoir, chacun de quarante-cinq degrez. Ainsi, 1°. il faut que cette tangente & le rayon soient égaux. 2°. Le quarré de la sécante * est égal au quarré du rayon & de la tangente, ou ce qui est la même chose, à deux fois le quarré du rayon. Or la corde de nonante est égale à la sécante de quarante-cinq degrez: par conséquent la corde de nonante est égale à deux fois le quarré du rayon, comme il est évident.*

Lemme Premier.

148 *Dans un triangle isoscele, si les angles de la base sont doubles de celui du sommet, je dis que la ligne qui coupe par la moitié un des angles de la base, coupe le côté opposé* AB *en moyenne & extrême raison.*

Soit BAC ce triangle isoscele, & que la ligne CD coupe par la moitié BCA un des angles de la base; il faut prouver qu'elle coupe AB en moyenne & extrême raison au point D.



1°. Puisqu'on suppose que l'angle BCA est double de BAC; donc la moitié DCA sera égale à l'angle CAD: partant le triangle ADC ayant sur sa base AC les angles égaux, il sera isoscele †, & aura ses côtez AD & DC égaux.

2°. L'angle BDC est égal aux deux opposez DAC & ACD ‡; par conséquent il est égal à l'angle ACB qui vaut ces deux angles, & à DBC qui est égal par l'hypothese à ACB; ainsi le triangle DCB ayant les angles sur la base DB égaux, est encore isoscele; ainsi $DC = BC$.

3°. Les

* *Sup.* n. 78. † *L.* 2. n. 83. ‡ *L.* 2. n. 73.

3°. Les deux triangles iſoſceles BAC & BDC, qui ont un angle commun au point B [a], ſont équiangles, & partant ſemblables: donc [b] AB eſt à BC, ou à AD ſon égal, comme DC ou ſon égal AD eſt à DB, c'eſt-à-dire, $\div\div$ AB. AD. DB; & par conſéquent AB eſt coupé en moyenne & extrême raiſon, puiſque la partie AD eſt moyenne entre la toute AB, & l'autre partie DB [c].

Lemme II.

Décrire un triangle iſoſcele, qui ait chacun des angles ſur la baſe double de l'autre. Euclid. IV. Prop. 10. 149

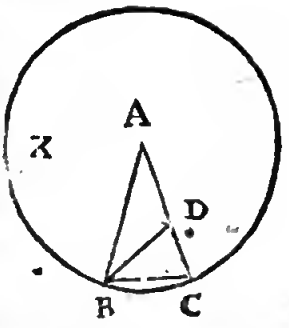
Ayant la ligne AB, il la faut diviſer en moyenne & extrême raiſon au point D [d]; de B & de D, & de l'intervalle de la médiane AD, je fais deux arcs qui ſe coupent au point C. Ainſi $BC = DC = AD$. Les deux triangles ADC & DCB ſont donc iſoſceles. Par la même conſtruction $\div\div$ AB. AD. DB. Mettant en la place des lignes égales AB. BC:: BC. BD; donc BAC & DBC ſont ſemblables, ou équiangles [e] & iſoſceles. Or l'angle BDC eſt égal à $DAC + ACD$ les oppoſez interieurs qui ſont égaux, puiſque ADC eſt iſoſcele: Donc DBC égal à BDC eſt le double de BAC; ce qu'il falloit prouver.

Lemme III.

Dans un triangle iſoſcele, dont le ſommet eſt au centre du cercle, & qui a pour baſe le côté du décagone, chaque angle de la baſe eſt double de celui du ſommet. 150

Le

a *L.* 2. *n.* 85. b *ſup. n.* 10. c *ſup. n.* 34.
d *ſup. n.* 34. e *ſup. n.* 13.



Le triangle iſoſcele *BAC*, a ſon ſommet au centre de *X*. Sa baſe *BC* eſt le côté d'un décagone, & par conſéquent la corde d'un arc de 36 degrez dixieme partie de 360 degrez que vaut le cercle. Il faut prouver que chaque angle de la baſe *CBA* & *ACB*, vaut 72 degrez double de 36; ce qui eſt évident, car les trois angles valent 180 degrez *. Si on ôte 36 de ce nombre, pour la valeur de l'angle du ſommet, reſte 144 pour les angles de la baſe, qui étant égaux, chacun ſera de 72 double de 36.

THEOREME III.

151 *La médiane du rayon coupé en moyenne & extrême raiſon eſt le côté du décagone, ou la corde de trente-ſix degrez.* Euclid. IV. Prop. 10. (*Fig. ci-deſſus.*)

Soit *AC* rayon d'un cercle diviſé en *D* en moyenne & extrême raiſon †, & qu'on ait fait la corde *BC* égale à la médiane *AD*, alors les angles ſur la baſe *BC* ſeront chacun double de *BAC* ‡: donc par le Lemme précédent *BC* eſt la corde de la dixieme partie du cercle, & par conſéquent le côté du décagone.

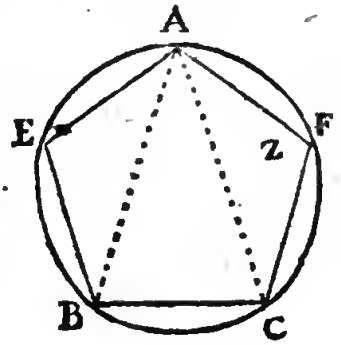
LEMME IV.

152 *Dans un pentagone ayant tiré deux lignes d'un de ſes angles aux extrémitez du côté oppoſé, cela fera un triangle iſoſcele, & chaque angle ſur la baſe ſera double de celui du ſommet.*

Z eſt un pentagone régulier. De *A* ayant me-

* *L.* 2. *n.* 75. † *ſup.* 2. 34. ‡ *ſup.* 2. 149.

mené aux extrémitez du côté oppoſé *BC* deux lignes, cela fera le triangle *BAC*, qu'il faut prouver être iſoſcele, & que *ABC* & *BCA* ſont chacun double de *BAC*.



1°. *AB* & *AC* cordes d'arcs égaux, ſont égales: donc *BAC* eſt iſoſcele [a].

2°. L'angle *BAC* a pour meſure la moitié de l'arc *BC*, & l'angle *ACB* la moitié de l'arc *AEB* [b]. Or *AEB* eſt double de *BC*: donc l'angle *ACB* eſt double de l'angle *BAC*. On prouvera de même que *ABC*, eſt double de *BAC*.

THEOREME IV.

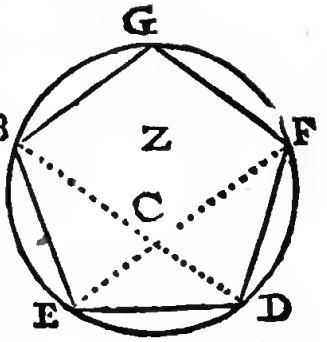
Dans un pentagone, ſi deux lignes cordes du double de l'arc que ſoutient chacun de ſes côtez ſe coupent, elles ſont coupées en moyenne & extrême raiſon, & la médiane ou la plus grande partie eſt un des côtez du pentagone. 153

Dans le pentagone *Z*, que je ſuppoſe régulier, inſcrit dans un cercle, les lignes *BD* & *EF*, chacune corde du double de l'arc dont chaque côté du pentagone eſt la corde, ſe coupent. Il faut prouver qu'elles le font en moyenne & extrême raiſon, & que la médiane ou la plus grande partie, telle que *BC*, eſt un des côtez du pentagone.

1°. L'angle *BEF* a pour meſure la moitié des deux arcs *BG* & *GF* [c], & l'angle *BCE*, la moitié des deux arcs *BE* & *FD* [d]. Or ces deux

a *L.* 1. *n.* 31. & *L.* 2. *n.* 57. b *L.* 2. *n.* 39. c *L.* 2. *n.* 39. d *L.* 2. *n.* 52.

deux meſures ſont égales: donc ces deux angles ſont égaux; ainſi *EBC* eſt iſoſcele [a], & partant $BE = BC$: ainſi *BC* eſt un des côtez du pentagone; ce qu'il falloit prouver.



2°. Par la même raiſon $CF = FD$: & puiſque $BD = FE$ cordes des mêmes angles, il faut que $CE = CD$: ainſi *ECD* eſt un iſoſcele. Le triangle *BED* eſt auſſi iſoſcele, puiſque $BE = ED$; car on ſuppoſe que *Z* eſt un pentagone régulier: ces deux iſoſceles ont un angle commun à *D*; donc ils ſont équiangles [b]: partant comme *BD* eſt à *BE*, ou à ſon égale *BC*; ainſi *ED* ou ſon égale *BC* ſera à *CD* [c], c'eſt-à-dire, $\div BD.\ BC.\ CD$; & par conſéquent, ſelon la notion de la moyenne & extrême raiſon, *BD* eſt coupée comme il a été propoſé.

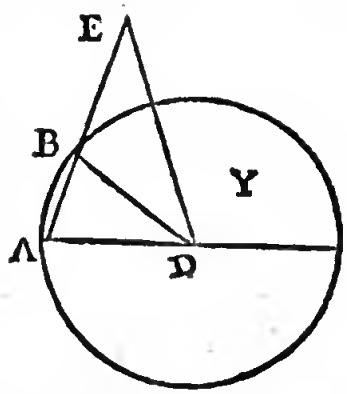
THEOREME V.

154 *La ligne droite compoſée du côté de l'hexagone & du décagone inſcrits au même cercle, eſt coupée en moyenne & extrême raiſon.* Euclid. XIII. Prop. 9.

Soit *AB* côté du décagone, & *BE* côté de l'hexagone, c'eſt-à-dire, une ligne égale au rayon *BD* [d]; je dis que *AE* eſt coupée en moyenne & extrême raiſon au point *B*.

EBD eſt iſoſcele, puiſque *BE* eſt ſuppoſée égale au rayon *BD*; le triangle *ABD* eſt auſſi iſoſcele, & l'angle *BAD* ou *ABD* eſt

a *L.* 2. *n.* 83. b *L.* 1. *n.* 85. c *ſup. n.* 10.
d *ſup. n.* 142.



eſt double de *B D A* [a]. Or *DBA* eſt auſſi double de *BDE*, puiſqu'il eſt égal [b] aux deux angles égaux *BED*, & *EDB*: donc *BED*, & *BDA* ſont égaux entre eux, & pris enſemble ils ſont égaux à *EAD*; ainſi le triangle *AED* eſt iſoſcele; partant, puiſque *BD* coupe en deux l'angle *EDA*, il faut que *EA* ſoit coupée en moyenne & extrême raiſon [c]: ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

De-là il s'enſuit que ſi AE *eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, dont* AB *ſegment ſoit côté d'un décagone,* BE *ſera le côté de l'hexagone inſcrit au même cercle.* 155

Puiſqu'entre *AE* & *AB* il n'y peut avoir qu'une moyenne proportionnelle, & qu'on vient de prouver que *BE*, côté de l'hexagone, étoit cette médiane.

Probleme I.

Un cercle étant donné, trouver la corde de trente-ſix degrez, ou le côté du décagone. Voyez la Figure de la page 262 num. 150. 156

Le cercle eſt *X*, dont *AB* eſt le rayon, que je diviſe en moyenne & extrême raiſon en *D* [d]. Je prens la corde *BC* égale à *AD*, qui ſera le côté du décagone [e].

Probleme II.

Décrire un décagone ſur une ligne donnée pour côté. 157

Je diviſe le côté donné *BC* en moyenne & extrê-

a *ſup. n.* 150. b *L.* 2. *n.* 73. c *ſup. n.* 148.
d *ſup. n.* 34. e *ſup. n.* 151.

trême raiſon [a], je lui ajoute la médiane; ce qui me donne une nouvelle ligne *AC*, auſſi diviſée en moyenne & extrême raiſon, dont *BC* eſt la médiane [b]: de cette ligne *AC* je fais le rayon d'un cercle dont *BC* eſt le côté du décagone [c]; au moyen de quoi j'acheve facilement le décagone requis.

PROBLEME III.

158 *Un cercle étant donné, trouver le côté du pentagone, ou inſcrire un pentagone dans un cercle.* Euclid. IV. Prop. 11.

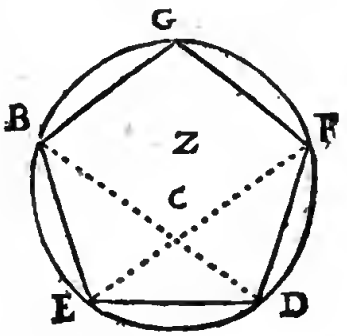
1°. Ayant trouvé le côté du décagone [d] on a celui du pentagone, qui eſt la corde du double de l'arc qui ſoutient un des côtez du décagone.

2°. On peut trouver encore le côté du pentagone de cette maniere. Il faut trouver un triangle iſoſcele, dont les angles de la baſe ſoient chacun double de celui du ſommet [e], & l'inſcrire, ou un qui lui ſoit ſemblable, dans le cercle donné [f]; ce qui donnera un côté du pentagone [g].

PROBLEME IV.

159 *Décrire un pentagone ſur un côté donné.*

Soit le côté donné *ED*. Je ſuppoſe le pentagone fait; en donnant le moyen de trouver les lignes *BD* & *EF*, on découvre ce qu'il faut faire. Or puiſque *BD* eſt coupée en moyenne & extrême raiſon au point *C* [b], que *BC* égale à *BE*, & par conſéquent à *ED*, eſt la médiane, en coupant le côté *ED* en moyenne & extrême raiſon, & lui ajoutant la médiane, on au-



a *ſup.* n. 34. b *ſup.* n. 35. c *ſup.* n. 156. d *ſup* n. 156.
e *ſup.* n. 149. f *L.* 2. n. 100. g *ſup.* n. 152. h *ſup.* n. 158.

ra une ligne égale à BD*, coupée pareillement en moyenne & extrême raiſon, dont la médiane ſera ED, par conſéquent égale à BC.

Comme on connoitra donc les trois côtez du triangle DEB, il ſera facile de le faire & d'achever tout le pentagone, ſoit en circonſcrivant un cercle autour de ce triangle †, ou faiſant de même le triangle EFD.

PROBLEME V.

Circonſcrire un pentagone régulier à un cercle. 160 Eucl. IV. Prop. 12.

Il faut, 1°. inſcrire un pentagone dans le cercle donné: 2°. mener du centre de ce cercle des lignes droites par les cinq angles du pentagone: 3°. mener des tangentes par les points de la circonference où ces lignes coupent le cercle. Ces tangentes, comme il eſt évident, formeront le pentagone que l'on cherche.

PROBLEME VI.

Dans un pentagone régulier, inſcrire un cercle. 161 Eucl. IV. Prop. 13.

Il faut ſur le milieu de deux côtez de ce pentagone, élever des perpendiculaires dont la ſection donnera le centre du cercle que l'on cherche, qu'il faut faire de l'intervalle entre ce centre & le milieu d'un des côtez du pentagne, comme il eſt évident.

PROBLEME VII.

Circonſcrire un cercle à un pentagone. Eucl. 162 IV. Prop. 14.

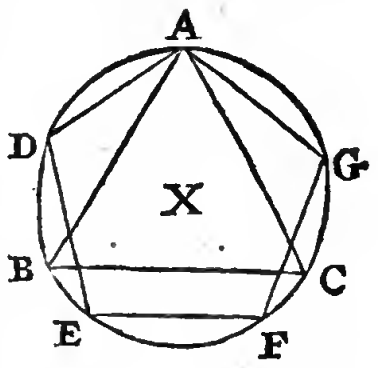
Ayant trouvé comme dans le Problême précédent le centre de ce cercle, il faut prendre l'intervalle de ce centre & d'un des angles du pentagone, & enſuite décrire un cercle qui ſera celui que l'on cherche.

* *ſup.* n. 35. † *L.* 1. n. 87.

PROBLEME VIII.

163 *Dans un cercle faire un polygone de quinze côtez.* Eucl. IV. Prop. 16.

Le cercle *X* étant proposé pour y décrire un quindécagone, 1°. je le partage en six arcs égaux; le rayon est la corde de chacun de ces arcs. 2°. Je prens deux de ces arcs, dont le double est la troisieme partie; ainsi la corde est un côté du triangle équilateral *ABC*. 3°. Je fais le pentagone *ADEFC*, dont chaque côté est la corde de l'arc cinquieme partie du cercle. Celle de l'arc troisieme partie de celui-ci, est le côté du quindécagone, dont cinq côtez font le tiers du cercle, & par conséquent répondent au côté du triangle équilateral. Cela étant, *BE* est le côté du quindécagone qu'on cherche; car à *AD* répondent trois parties de ce polygone, & autant à *DE*. Ainsi à *AD* & *DE* répondront six côtez. Mais à *AB* répondent cinq parties; ainsi reste *BE*, sixieme partie de *AE*, pour le côté du quindécagone.

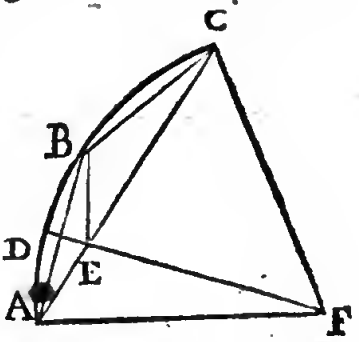


THEOREME VI.

164 *Le quarré d'un des côtez d'un pentagone est égal aux quarrez d'un des côtez du décagone & de l'hexagone, inscrits dans le même cercle.* Eucl. XIII. Prop. 10.

Soit *AC* le côté d'un pentagone. Ayant divisé l'arc *AC* en deux parties égales au point *B*, & mené les cordes *AB*, *BC*, elles seront les côtez du décagone, & *AF* ou *FC* rayons du cercle, se-

ſeront les côtez de l'hexagone. Il faut prouver que $\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AB}^2$.



Soit menée la ligne *FD* coupant *AB* en deux parties égales, & du point *E* ſoit menée *EB*; l'on aura les deux triangles *ACF* & *ECF* qui ſont ſemblables; car ils ont l'angle *C* commun: & l'angle *CFE* eſt égal à *FAC*, parce qu'ils ſont tous deux d'un égal nombre de degrez, ſavoir de 54; car l'arc *BC* étant de 36 degrez & *BD* de 18, *DC* ſera de 54, meſure de l'angle *CFD*, auquel eſt égale *CAF* à cauſe que le triangle *AFC* eſt iſoſcele, & que l'angle du centre eſt de 72 degrez. Ces triangles donc étant ſemblables ∴ *AC. AF. EB* [a]: donc $\overline{AF}^2 = AC \times EC$ [b].

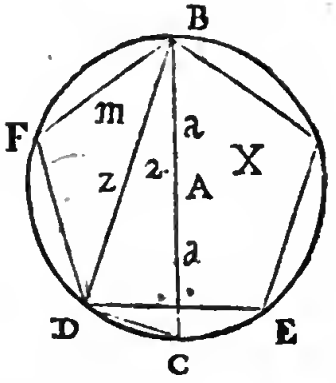
Maintenant le triangle iſoſcele *AEB* eſt ſemblable à *ABC* auſſi iſoſcele; car ils ont un angle commun, ſavoir *A*; & par conſéquent tous les autres égaux [c]. Donc ∴ *AE. AB. AC*; donc $\overline{AB}^2 = AE \times AC$; donc $\overline{AF}^2 + \overline{AB}^2 = AC \times EC + AE \times AC$. Mais ces deux rectangles ſont égaux au quarré de *AC* [d]; car $AE + EC = AC$. Donc $\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AB}^2$; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Le quarré du côté du pentagone inſcrit dans un cercle, & le quarré de la corde qui ſoutient l'angle du polygone joints enſemble, valent cinq fois le quarré du rayon du cercle. 165

a *ſup. n.* 10. b *L.* 3. *n.* 57. c *L.* 2. *n.* 85. d *L.* 3. *n.* 18.

Soit BF côté du pentagone $=b$, & BC diametre du cercle $=2a$, & BD la soutenante de l'angle F du pentagone $=d$. Il faut prouver que $\overline{BF}^2 + \overline{BD}^2 = 5\overline{AB}^2$, ou $bb + dd = 5aa$.

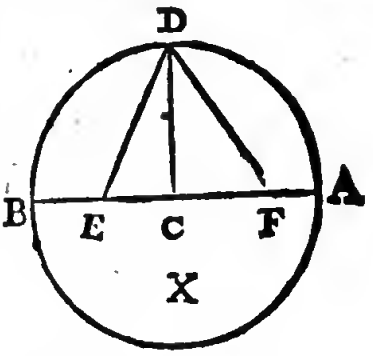


Soit mené $DC=c$, qui sera le côté du décagone, & formera le triangle rectangle BDC [a]. Donc $dd + cc = 4aa$ [b]; mais par le Théorême précédent $bb = aa + cc$; joignant cette égalité avec la premiere, on aura pour somme $bb + dd + cc = aa + cc + 4aa$; retranchant cc de part & d'autre, $bb + dd = 5aa$; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME IX.

166 *Un cercle étant donné, trouver le côté du pentagone & du décagone d'une autre maniere que celle qui a été enseignée.*

Soit AB diametre du cercle donné, & son rayon CD perpendiculaire sur AB; si l'on prend CE moitié de BC, & que du point E l'on mene ED, & qu'ensuite l'on prenne $EF=ED$ & qu'on tire DF; je dis que cette ligne sera le côté du pentagone cherché.



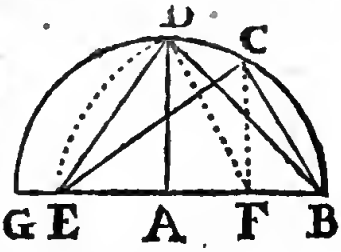
Car [c] $BF \times FC + \overline{EC}^2 = \overline{EF}^2 = \overline{ED}^2$. Mais $\overline{FD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{FC}^2$ [d], ainsi

a L. 2. n. 44. b *Sup.* n. 78. c L. 2. n. 22. d *Sup.* n. 78.

ainſi $BF \times FC + \overline{EC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{EC}^2$: donc retranchant $\overline{EC}^2$ de part & d'autre, $BF \times FC = \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2$; & remettant cette égalité en proportion [a], on aura $\div BF. BC. FC$; donc [b] la ligne FB eſt coupée en moyenne & extrême raiſon: & puiſque BC ou DC eſt le côté de l'hexagone, FC ſera celui du décagone [c]. Mais $\overline{FD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CF}^2$ [d]: donc DF eſt le côté du pentagone [e]; ce qu'il falloit trouver.

AVERTISSEMENT.

Cette operation s'abrege de cette maniere. On 167 *prend* BC *égale au rayon du Cercle*, BD *égale à la corde de nonante, ou au côté du quarré inſcrit dans le cercle*, & CE *égale à* BD: *la ligne* DE *ſera le côté du pentagone*, & AD *étant le rayon du cercle*, AE *ſera le côté du décagone.*



Pour démontrer cette operation, de C *j'abaiſſe une perpendiculaire ſur le rayon* AB, & *de* D *ſur le centre* A, *la perpendiculaire* AD: *ainſi* BD *eſt la corde de nonante, à qui* CE *eſt égale.*

Soit poſé AB, AD ou $BC = 2a$; ainſi $BG = 4a$. Or [f] $\div BG. BC. BF$, c'eſt-à-dire, $\div 4a. 2a. a$; donc BF eſt la moitié du rayon. Mais on a vu dans le préſent Théorême, que pour trouver ED côté du pentagone, on a fait $FE = FD$. Si donc dans la préſente conſtruction on prouve que cette égalité s'y rencontre, elle en fera la démonſtration.

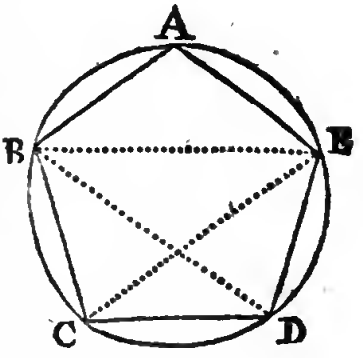
a *L.* 3 *n.* 58. b *ſup. n.* 34. c *ſup. n.* 154. d *ſup. n.* 78. e *ſup. n.* 164. f *ſup. n.* 28.

Puiſque $FB = a$, FG ſera $= 3a$, le rectangle $GF \times FB$, c'eſt-à-dire, $3aa = \overline{FC}^2$ [a]. Or AB & AD étant chacun $2a$, leurs quarrez ſeront enſemble $8aa = \overline{DB}^2$ [b] $= \overline{CE}^2$ par la conſtruction, lequel eſt égal $\overline{CF}^2 + \overline{EF}^2$. Si donc de $\overline{CE}^2 = 8aa$ on ôte $\overline{FC}^2 = 3aa$, reſtera $5aa$ pour $\overline{EF}^2$, à quoi eſt auſſi égal $\overline{FD}^2$ puiſqu'il eſt égal [c] à $\overline{DA}^2 + \overline{AF}^2$, c'eſt-à-dire, à $4aa + aa$: partant $FD = FE$; c'eſt ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME VII.

168 *Si dans un pentagone équilateral trois angles pris comme on voudra ſont égaux, il ſera équiangle.* Eucl. XIII. Prop. 7.

Soit le pentagone équilateral $ABCDE$, qui a trois de ſes angles pris comme on voudra, égaux, ſavoir, A, C, D; il faut prouver que tous ſont égaux, que $C = B = E$.



Les triangles BAE, BCD, CDE étant iſoſceles, dont les angles A, C, D égaux ſont compris par les côtez égaux, ils ſeront en tout égaux [d]; & ainſi les baſes BE, BD, CE ſeront égales, comme auſſi tous les angles formez par les côtez égaux ſur les dites baſes ſeront égaux. De même les deux triangles BEC, EBD iſoſceles ayant tous leurs côtez égaux, auront auſſi les angles EBC, ECB, BED, BDE égaux

a *ſup. n.* 28. & *L.* 3. *n.* 57. b *ſup. n.* 78. c *ſup. n.* 78.
d *L.* 2. *n.* 98.

égaux [a]. Si à chacun des angles égaux *EBC*, *ECB* on ajoute les égaux *ABE*, *DCE*, le total *B* ſera égal au total *C*. La même choſe eſt pour les angles *E* & *D*, partant tous ces cinq angles ſeront égaux; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VIII.

Quand le rayon d'un cercle eſt rationnel, le côté du décagone inſcrit dans ce cercle eſt incommenſurable, tant en lui-même qu'en puiſſance, avec ce rayon. 169

Soit *B* ligne rationnelle rayon d'un cercle, coupée en moyenne & extrême raiſon: *x* que je ſuppoſe être la médiane, ſera le côté du décagone [b]. Or la médiane *x* eſt incommenſurable, tant en elle-même qu'en puiſſance, avec *B* [c].

THEOREME IX.

Lorſque le rayon d'un cercle eſt rationnel, les côtez du pentagone inſcrit dans ce cercle ſont incommenſurables, tant en eux-mêmes qu'en puiſſance, avec ce rayon. Eucl. XIII. Prop. 11. 170

Soit *b* ligne, rationnelle rayon d'un cercle, *z* le côté d'un pentagone, & *x* le côté d'un décagone, inſcrits dans le cercle dont *b* eſt le rayon. Partant $bb + xx = zz$ [d]: donc puiſque le quarré *xx* n'eſt pas rationnel, comme nous venons de le démontrer dans le dernier Théorême, le quarré *zz* ne peut être rationnel [e], par conſéquent ſa racine *z* n'eſt pas rationnelle, puiſque tout quarré qui n'eſt pas égal à un nombre quarré, ne peut avoir pour racine une grandeur préciſément égale à un nombre, comme nous l'avons prouvé ci-deſſus [f].

De la quadrature du Cercle.

Nous avons vu [g] *que la ſurface du cercle eſt égale à un triangle, qui a pour hauteur le rayon* 171

a *L.* 2. *n.* 92. b *ſup. n.* 151. c *ſup. n.* 140. d *ſup. n.* 164.
e *ſup. n.* 116. f *ſup. n.* 114. g *L.* 2. *n.* 154.

*de ce cercle, & pour baſe la circonference; ainſi une moyenne proportionnelle entre le rayon & la circonference, ſera le côté d'un quarré égal au cercle. Mais pour trouver cette moyenne proportionnelle, il faudroit, le rayon étant donné, trouver une ligne droite égale à la circonference, qu'on ne peut trouver, à moins de connoitre la raiſon du rayon à la circonference, qui n'eſt point connue exactement, mais à peu près. Le cercle peut être pris pour un polygone d'un nombre infini de côtez; le moyen donc le plus exact & le moins défectueux de trouver ladite raiſon, c'eſt de prendre le plus grand polygone qu'on pourra; & de voir quelle eſt la raiſon de ſon circuit avec le diametre du cercle où il eſt inſcrit. Archimede a conſideré un polygone de nonante-ſix côtez, dont le circuit eſt au diametre du cercle comme 223 à 71, laquelle raiſon eſt moindre que celle de la circonferenee du cercle au diametre, puiſque ce polygone inſcrit eſt plus petit que le cercle *. Archimede comparant un même polygone, mais circonſcrit, avec le diametre, il a trouvé que la raiſon de l'un à l'autre étoit comme 22 à 7, laquelle eſt plus grande que celle de la circonference du cercle avec le diametre, puiſque ce polygone circonſcrit eſt plus grand que le cercle. On a donc deux raiſons, ſavoir celles de 223 à 71, & de 22 à 7, dont l'une eſt plus petite, & l'autre plus grande que la véritable qu'on cherche. Donnons un même conſéquent à ces deux raiſons, les réduiſant à celle-ci, ſelon ce qu'on a enſeigné †.*

1561
1562 497

Ayant ainſi ſuppoſé le diametre de 497 parties, la circonference du cercle ſera plus grande que 1561, & plus petite que 1562. Diviſons l'unité qui

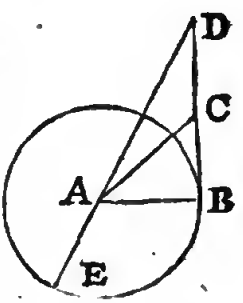
* *L. 3. n. 147.* † *L. 3. n. 89.*

qui eſt la difference de ces deux nombres par 497, *le quotient* $\frac{1}{497}$ *fera voir que la difference, dont l'un & l'autre nombre differe de la veritable grandeur de la circonference, eſt moindre que la* $\frac{1}{497}$ *partie du diametre; ce qui eſt peu de choſe.*

Ceux qui ont pris des polygones plus grands que 172
de nonante-ſix côtez, ont trouvé une raiſon plus exacte. Jean Pell en conſidere un de 256 *côtez, dont chacun eſt plus petit que* 24545, *poſé que le rayon du cercle ſoit de* 1000000; *ainſi la demie circonference de ce polygone eſt plus petite que* 3141760. *Si le diametre du cercle étoit donc* 100000, *tout le circuit de ce polygone circonſcrit au cercle ſeroit plus petit que* 31417*6*. *Or ce calcul qu'il fait dans un Ouvrage imprimé à Amſterdam l'an* 1647, *ne ſuppoſe aucune extraction de racine. Il eſt fondé ſur le Théorême ſuivant.*

THEOREME.

BC étant la tangente d'un arc moindre qu'un arc de quarante-cinq degrez; & *BD* la tangente d'un arc double; *BC* eſt à *BD* comme le quarré du rayon *AB*, moins le quarré de *BC*, eſt à deux fois le quarré du rayon *AB*.



Il faut démontrer que $BC.\ BD :: \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2.\ 2\overline{AB}^2$. Puiſqu'on ſuppoſe que l'angle *BAD* eſt double de *BAC*: donc $AB.\ AD :: BC.\ CD$ *, & componendo $AB.\ AD + AB$ (ou DE) $:: BC.\ BD$ †. Partant $\overline{AB}^2.\ \overline{DE}^2 :: \overline{BC}^2.\ \overline{BD}^2$ ‡.

Alternando, $\overline{AB}^2.\ \overline{BC}^2 :: \overline{DE}^2.\ \overline{BD}^2$; donc

* *ſup. n.* 17. † *L.* 3. *n.* 49. ‡ *L.* 3. *n.* 84.

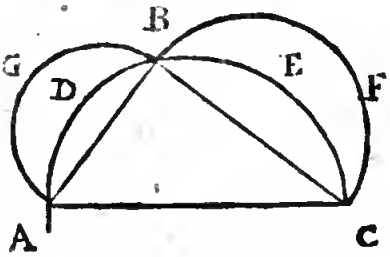
dividendo & componendo $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 . 2\overline{AB}^2 :: \overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 . 2\overline{DE}^2$. Ainſi reſte à démontrer que $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 . 2\overline{DE}^2 :: BC. BD.$ Car alors $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 . 2\overline{AB}^2 :: BC. BD.$ puiſque deux raiſons égales à une troiſieme ſont égales entre elles. Or $\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + 2AE \times AD + \overline{AD}^2$ *. Mais $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$ (ou $\overline{AE}^2 + \overline{BD}^2$ †.) Donc $\overline{DE}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2AE \times AD + \overline{BD}^2$. Donc retranchant $\overline{BD}^2$ de part d'autre $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2AE \times AD$. Or $2\overline{AE}^2 + 2AE \times AD = 2AE \times ED$ ‡: Donc $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 2AE \times ED$. Ces deux rectangles $2AE \times ED$ & $2\overline{ED}^2$ ont la même baſe, ſavoir ED: ils ſont donc entre eux comme AE ou AB eſt à ED. Or $AB. ED :: BC. BD$: Donc $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2$ égal à $2AE \times ED$ eſt à $2\overline{ED}^2$ comme BC à BD; ce qu'il falloit montrer.

173 *Suivant cette raiſon qu'Archimede établit de la circonference du cercle à ſon diametre, ſavoir celle de* 22 *à* 7, *ou de* 44 *à* 14, *ou de* 66 *à* 21, *qui eſt toujours la même raiſon, la ſurface du cercle eſt au quarré de ſon diametre comme* 11 *à* 14. *Car ſoit nommée* m *la circonference du cercle, &* n *le diametre, multipliant* m & n *par* n, *alors* mn. nn :: m. n. ‡ *Et puiſque* m. n :: 44. 14: *donc* mn. nn :: 44. 14. *Donc le quart de* $\frac{mn}{}$

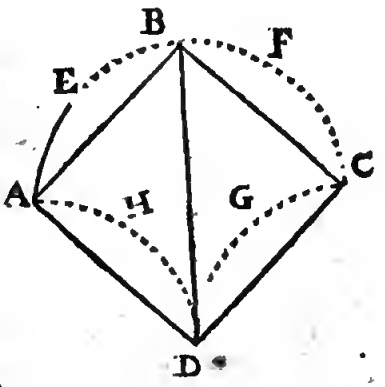
* *L.* 3, *n.* 20. † *L.* 3. *n.* 140. ‡ *L.* 3. *n.* 29. ‡ *L.* 3. *n.* 54.

mn *ſera à* nn *comme* 11 *le quart de* 44 *eſt à* 14. *Or le quart de* mn *eſt la ſurface du cercle* * : *donc cette ſurface eſt à* nn *quarré du diametre, comme* 11 *eſt à* 14.

Ainſi on auroit trouvé la quadrature du cercle, ſi on étoit aſſuré que la vraye raiſon de la circonference du cercle à ſon diametre, eſt comme 22 *à* 7; *mais cette raiſon n'eſt pas juſte, & on ne connoit pas encore quelle eſt la vraye. On connoit néanmoins en partie cette quadrature, c'eſt-à-dire, qu'on peut aſſigner une portion de cercle égale à une figure rectiligne; car le triangle* ABC *étant rectangle, le demi-cercle* ADBE *eſt égal aux deux demi-cercles* AGB *&* BFC †. *Ôtant donc les parties communes, ſavoir* ABD *&* BCE, *il reſtera* AGBDA *&* CEBF *comme deux lunes ou croiſſans, qui ſeront égales au reſte du demi-cercle* ADBEC, *lequel reſte eſt le triangle* ABC. 174



On voit auſſi à l'œil que la figure AEBF CGDH, *ſemblable au couteau à pié des Cordonniers, eſt égale au quarré* ABCD: *car par la conſtruction les parties* AHD = AEB = BFC = CGD.

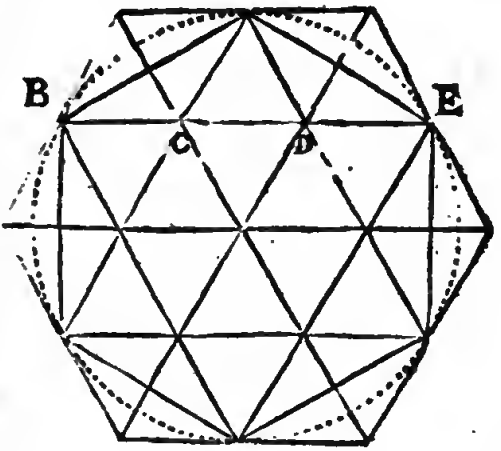


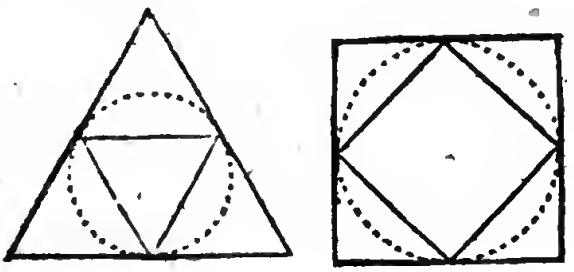
175

Les ſeules figures font voir qu'un triangle circonſcrit à un cercle eſt quadruple de l'inſcrit, que le quarré circonſcrit eſt le double de l'inſcrit, que l'hexa-

* *L.* 2. *n.* 154. † *ſup. n.* 79.

l'hexagone circonſcrit eſt à l'inſcrit comme 4 *à* 3. *Remarquez ici en paſſant, que pour couper géométriquement une ligne comme* BE *en trois parties égales, il faut faire qu'elle ſoit le côté d'un triangle équilateral inſcrit dans un cercle; après ayant fait l'hexagone & coupé les côtez de l'hexagone par des perpendiculaires, vous trouverez que les perpendiculaires couperont* BE *en trois parties égales* BC, CD, DE.



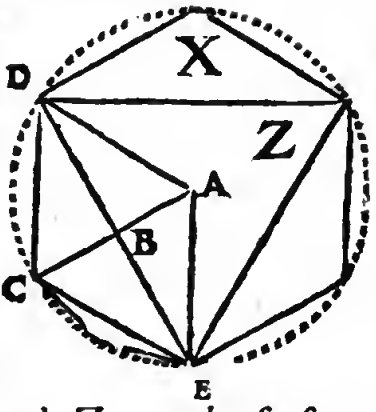


Voilà un Théorême général, qui donne une connoiſſance fort étendue, de ce qu'on peut ſavoir de cette matiere.

176 Quand de deux polygones inſcrits l'un a deux fois plus de côtez que l'autre, le plus grand eſt au plus petit, comme le rayon du cercle eſt à l'apothême du plus petit.

Z eſt un polygone dont l'apothême eſt AB, *& X un polygone qui a deux fois plus de côtez. La ſurface de Z eſt égale à autant de fois le triangle*

gle DAE, *que* Z *a de côtez ; & il eſt clair, qu'ajoutant à chacun de ces triangles le triangle* DCE, *on aura la ſurface de* X *qui eſt à celle de* Z, *comme le le rhomboïde de* AECD *eſt au triangle* DAE. *Or ces deux figures ſont l'une à l'autre comme le rayon* AC *eſt à* AB, *qui eſt l'apothême de* Z ; *car les ſurfaces des deux triangles* DAE *&* DCE, *qui ont même baſe, ſont comme leur hauteur* AB *&* BC ; *ainſi de tous autres polygones, dont l'un aura deux fois plus de côtez que l'autre.*



Si on diviſe le polygone X *pour en faire un qui ait deux fois plus de côtez, que je nomme* Y ; *il en ſera de même : & il eſt bon de remarquer que* Z, *le premier polygone, ſera à ce troiſieme* Y *comme le plan de l'apothême du premier & du ſecond eſt au quarré du diametre ; ce que je démontre ainſi. Soit l'apothême du premier nommé,* m ; *celui du ſecond,* n ; *& le rayon* k, *ſelon ce qui a été démontré.*

$$\begin{cases} Z.\ X :: m.\ k. \\ X.\ Y :: n.\ k. \end{cases}$$

En multipliant les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſéquens,

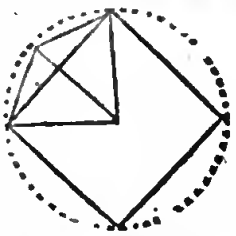
$$ZX.\ XY :: mn.\ kk.$$

Or $ZX.\ XY :: ZY$; *donc,* $Z.\ Y :: mn.\ kk.$ *Le premier polygone* Z *ſera au troiſieme polygone* Y, *comme* mn *plan de l'apothême du premier & du ſecond eſt à* kk *quarré du rayon.*

Par cette méthode on démontre que le premier polygone eſt au quatrieme, comme le ſolide fait de l'apothême du premier, du ſecond & du troiſie-

ſieme eſt au cube du rayon du cercle ; ainſi de ſuite à l'infini.

177 *L'apothême d'un quarré inſcrit eſt la moitié d'un des côtez ; ainſi un quarré eſt à un octogone comme la moitié d'un de ſes côtez eſt au rayon du cercle où il eſt inſcrit ; ou, ce qui eſt la même choſe, comme un de ſes côtez eſt au diametre du cercle. C'eſt pourquoi on a droit de conclure qu'un quarré dans un cercle eſt à un polygone qu'on a fait d'une infinité de côtez en doublant toujours les côtez, c'eſt-à-dire, d'un quarré qui fait un octogone, d'un octogone un polygone de ſeize côtez, ainſi de ſuite, lequel polygone peut être conſideré comme un cercle ; on peut, dis-je, conclure que le quarré eſt au cercle comme une grandeur faite de la multiplication de tous les apothêmes de ces polygones, à la plus haute puiſſance du rayon du cercle. Mais ce n'eſt preſque rien ſavoir ; car outre qu'on rencontre des raiſons ſourdes, le rayon & le diametre ſont diviſibles à l'infini ; ainſi on ne peut point comprendre le nombre de tous ces apothêmes. Il eſt donc impoſſible d'arriver par cette voye enfin à un polygone égal à un cercle. Cette figure eſt ainſi incompréhenſible, quoiqu'elle ſoit la plus ſimple de toutes les figures de Géometrie.*



ELE-

ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
OU
DE LA MESURE
DE L'ETENDUE.

LIVRE CINQUIEME.

De la troiſieme eſpece d'Etendue, c'eſt-à-dire des Solides ; comment les Solides ſe forment & ſe meſurent.

SECTION PREMIERE.

Des Sections & Rencontres des Plans, dont on peut concevoir qu'un Solide eſt formé.

AVERTISSEMENT.

ON *peut concevoir qu'un Solide, quel qu'il ſoit, eſt compoſé de differens plans poſez les uns ſur les autres ; ou qu'il eſt fait par le mouvement d'un ſeul mû d'une certaine maniere. Auſſi, ſelon que deux ou pluſieurs plans ſe coupent ou ſe ren-*

rencontrent, ils forment des Solides; ce qui nous oblige en traitant des Solides, de commencer par la rencontre & ſection des Plans.

Propoſitions évidentes touchant les Plans.

Proposition I.

1 *Une ligne droite en ſe mouvant le long d'une autre ligne, qui eſt droite & immobile, & gardant avec elle une même ſituation, fait une ſuperficie plane ou un plan.*

Cette ſuperficie a toutes ſes parties entre ſes extrémitez également poſées; car elles ſont faites uniformement: Et ce qui fait ſa difference des autres ſuperficies, qui ne ſont pas planes, c'eſt que ſelon la maniere dont elle eſt faite, on lui peut appliquer en tous ſens une ligne droite, comme on le va dire.

Proposition II.

2 *Une ligne droite peut être appliquée en tout ſens à une ſurface plane, & convenir avec elle.*

Proposition III.

3 *La ſurface d'un plan eſt la plus courte qu'on puiſſe concevoir entre les bornes de ce plan.*

Car un plan eſt compoſé de lignes droites, qui ſont les plus courtes qu'on puiſſe concevoir entre leurs extrémitez. Mais je ne dis pas que toute ſurface qui eſt la plus courte entre ſes bornes, eſt un plan; car entre deux lignes qui ſont à quelque diſtance l'une de l'autre, & qui ne ſont pas poſées de la même maniere, ſi on mene des lignes droites, on fera une ſuperficie la plus courte qui puiſſe être entre ces

ces deux lignes, mais elle ne ſera pas un plan; ainſi quoiqu'il ſoit vrai que tout plan eſt une ſurface la plus courte qu'on conçoive entre ſes bornes, néanmoins toute ſurface la plus courte entre ſes bornes n'eſt pas un plan.

PROPOSITION IV.

Un plan élevé ſur un plan eſt perpendiculaire ſur ce plan, lorſqu'il ne panche pas plus d'un côté que de l'autre. 4

PROPOSITION V.

Deux plans ſont paralleles, lorſque dans toutes leurs parties ils ſont à une égale diſtance l'un de l'autre, & qu'étant prolongez ils ne ſe rencontrent point. 5

PROPOSITION VI.

On peut prolonger un plan, ou le concevoir prolongé de tous côtez, autant qu'il ſera néceſſaire. 6

PROPOSITION. VII.

Une ligne droite ne peut être en partie ſur un plan, & en partie en l'air. Eucl. XI. Prop. 1. 7

Car pour-lors cette ligne ne pourroit être appliquée à ce plan, & convenir avec lui; ainſi, ſelon la ſeconde Propoſition, ce plan ne ſeroit pas plan. Outre cela on peut concevoir que la partie de cette ligne qui ſeroit dans le plan étant prolongée, demeureroit toujours dans le plan, ce ſeroit donc une autre ligne que celle qui ſeroit en l'air; ces deux lignes néanmoins ayant deux points communs, ne peuvent pas être differentes *.

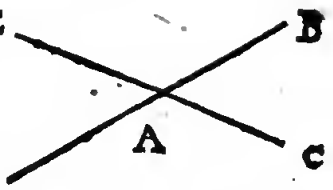
PROPOSITION VIII.

Deux lignes droites qui ſe coupent peuvent être conçues dans un même plan. Eucl. XI. Prop. 2. 8

Les

* L. 1. n. 16.

Les lignes *DB* & *EC* se coupent: ayant mené entre *AB* & *AC* des lignes droites, on aura une superficie, qui est un plan: car on y peut appliquer une ligne droite, & cette superficie est la plus courte qu'on puisse concevoir entre les lignes *AB* & *AC* qui seront sur ce plan; lequel étant prolongé, si *AD* & *AE*, qui sont parties des lignes *BD* & *EC* ne se trouvent pas dans ce même plan, *BD* & *CE* seront en partie sur lui, & en partie en l'air: ce qu'on vient de voir être impossible.



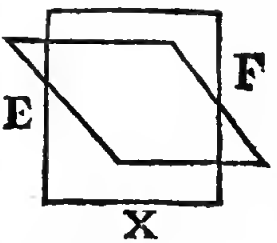
PROPOSITION IX.

9 *Tout triangle peut être conçu dans un plan.* C'est une suite de la Proposition précédente.

PROPOSITION X.

10 *La commune section ou rencontre de deux plans, est une ligne droite.* Eucl. XI. Prop. 3.

X & *Z* se coupent. Les extrémitez de leur section sont les points *E* & *F*, entre lesquels on a mené une ligne sur *Z* & une sur *X*. Si ces deux lignes n'étoient pas une même ligne, on pourroit mener entre deux mêmes points plus d'une ligne droite; ce qui est impossible *. La section de ces deux plans ne peut donc être qu'une ligne droite.

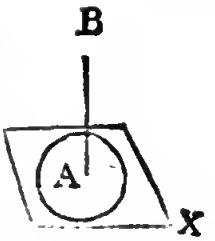


PROPOSITION XI.

11 *Une ligne droite telle que* AB *élevée sur le plan* X, *doit être censée perpendiculaire lorsque de*

* *L.* 1. *n.* 15.

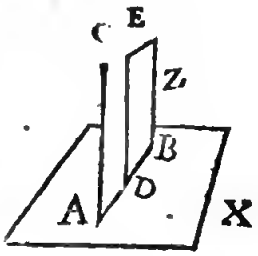
de A *ſon pié, comme centre, ayant fait un cercle,* B *ſon ſommet eſt également éloigné de la circonference de ce cercle; & ſi cela n'eſt pas, elle ne peut être dite perpendiculaire.*



Cela eſt conforme à la notion de la ligne perpendiculaire, qui ne panche pas plus d'un côté que d'autre.

PROPOSITION XII.

Concevant que AC *une ligne perpendiculaire ſur le plan* X, *eſt mûe d'un mouvement droit & uniforme ſelon une ligne droite telle que* AB, *elle ſera le plan* Z, *qui ſera perpendiculaire en toutes ſes parties ſur le plan* X. 12



PROPOSITION XIII.

Si la ligne ED *perpendiculaire ſur* AB *ſection de* Z *&* X *eſt perpendiculaire ſur* X, *tout le plan* Z *eſt perpendiculaire ſur* X. 13

Car on peut concevoir que le plan *Z* eſt fait par le mouvement droit & uniforme de *DE* ſur *AB*; ainſi par la Propoſition précédente, le plan *Z* eſt perpendiculaire ſur le plan *X*.

THEOREME I.

Entre deux lignes paralleles ou non, qui ſont dans un même plan, ou entre une ligne & un point, on ne peut concevoir qu'un même plan, dans lequel eſt toute ligne droite menée entre deux lignes. Eucl. XI. Prop. 7. 14

Car ſi on veut concevoir deux plans, l'un ſera plus grand ou plus petit; ce qui ne peut être, puiſ-

puiſque * toute ſuperficie qui n'eſt pas la plus petite entre ſes bornes, n'eſt pas un plan. Ils ſeront donc égaux; ce qui étant, ils ne ſont pas differens: car ſi on veut dire qu'ils ſont poſez l'un ſur l'autre, comme ils n'ont point d'épaiſſeur, ils ne peuvent faire qu'un ſeul plan.

THEOREME II.

15 *Deux plans qui conviennent en trois points qui ne ſont pas ſur la même ligne, conviennent entierement.*

1°. Entre deux dès points donnez, on ne peut concevoir qu'une ligne droite. 2°. Entre cette ligne droite & le troiſieme point donné, on ne peut concevoir deux differens plans, par la Propoſition précédente: ainſi la partie de ces deux plans entre ces trois points eſt une même choſe; par conſéquent ſi on prolonge cette partie, ce ne ſera qu'un même plan; ainſi ces deux plans ne ſeront pas differens.

COROLLAIRE.

16 *La poſition d'un plan ne dépend donc que de trois points, qui ne ſoient pas ſur une même ligne.*

Ou, ce qui eſt la même choſe, *trois points qui ne ſont pas ſur une même ligne étant donnez, le plan eſt donné.*

THEOREME III.

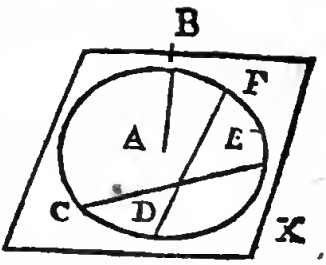
17 *Si* B *ſommet de la ligne* AB *élevée ſur le plan* X *eſt également éloigné de* C, D, E *trois points également diſtans de ſon pié* A, *cette ligne eſt perpendiculaire ſur* X.

1°. Concevons dans le plan *X* un cercle également diſtant de *B*, qui paſſe par *C*, *D*, *E*, qu'on a ſuppoſé en égale diſtance de *B*.

2°. Con-

* *ſup.* n. 2.

2°. Concevons un second cercle dont *A* ſoit le centre, qui paſſe par les trois points *C*. *D*, *E* auſſi également éloignez de *A* par l'hypotheſe. Ces deux cercles [a] ne ſont qu'un même cercle. Donc [b] *AB* eſt perpendiculaire ſur *X*; ce qu'il falloit prouver.



Probleme I.

D'un point donné en l'air, comme eſt B, *abaiſſer une perpendiculaire ſur le point* X. Eucl. XI. Prop. 11. (*même figure.*) 18

Je tire à diſcretion deux lignes droites *CE* & *DF*, & appliquant une pointe du compas ſur *B*, avec l'autre je prens les points *C*, *D*, *E* également diſtans, par leſquels [c] je fais paſſer un cercle, au centre duquel je mene de *B* une ligne qui ſera perpendiculaire par le Théorême précédent.

Theoreme IV.

Si une ligne eſt perpendiculaire ſur le point de la ſection de deux lignes qui ſont ſur le plan, elle l'eſt ſur tout ce plan. Eucl. XI. Prop. 4. 19

Car ayant pris dans ces deux lignes de part & d'autre du point de ſection des points également éloignez, le ſommet de la perpendiculaire ſur ces lignes ſera également éloigné de quatre points qui ſont ſur ce plan [d]; partant cette ligne ſera perpendiculaire ſur tout le plan [e].

Theoreme V.

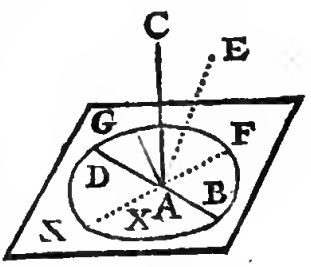
La ligne droite AB, *& toute autre dans le plan* Z *menée par* A *pié de la perpendiculaire* AC 20

ſur

a *L.* 1. *n.* 88. b *ſup. n.* 11. c *L.* 1. *n.* 87.
d *L.* 1. *n.* 42. e *ſup. n.* 11.

ſur ce plan, eſt perpendiculaire ſur AC, *ou* AC *eſt perpendiculaire ſur toutes les lignes droites du plan Z qui paſſent par* A.

De *A* pié de la perpendiculaire *AC*, je décris un cercle *X*, & je prolonge la ligne *BA* de ſorte qu'elle coupe *X* en *D* & *B*. Si *C*, ſommet de la perpendiculaire *AC* n'eſt pas également diſtant de *D* & de *B*, alors *AC* ne ſera pas perpendiculaire ſur *AB* [a]; mais auſſi *AC* ne ſera pas perpendiculaire ſur le plan *Z* [b]; ce qui eſt contre l'hypotheſe. *AB* rencontre donc perpendiculairement *AC*; ainſi de toute autre ligne du plan *Z*, qui paſſe par *A*.



THEOREME VI.

21 *Si* AC *une ligne droite rencontre perpendiculairement dans un même point trois autres lignes droites* AB, AF, AG, *ces trois lignes ſeront en un même plan.* Eucl. XI. Prop. 5. (*même figure.*)

Soient *AB* & *AF* dans le plan *Z*, & que *AG* n'y ſoit pas, mais ſur un autre plan. Concevant un troiſieme plan *Y* qui paſſe par *AC* & *AG*, & qui étant prolongé coupera *Z*; cette ligne *AC* ſera perpendiculaire ſur ce plan *Z* [c]: donc elle le ſera auſſi ſur la ligne de ſection de *Z* & de *Y* [d], & par la ſuppoſition elle l'eſt ſur *AG*; ainſi ſur *AC* & au même point *A*, il y aura deux perpendiculaires, ce qui ne peut pas être [e].

PROBLEME II.

22 *Sur le point* A *dans le plan* Z, *élever une per-*

a *L.* 1. *n.* 40. b *ſup. n.* 11. c *ſup. n.* 19.
d *ſup. n.* 20. e *L.* 1. *n.* 49.

perpendiculaire. Eucl. XI. Prop. 12. (*même fig.*)

Il faut de *A* centre faire un cercle; toute ligne qui deſcendra d'un point également éloigné de ce cercle, ſera la perpendiculaire qu'on demande.

Mais pour trouver méchaniquement ce point, il faut ſe ſervir de deux Equerres appliquées par un de leurs côtez ſur deux differentes lignes tracées ſur ce plan, & au point de leur ſection, faiſant convenir enſemble l'autre côté deſdites Equerres; ce qui ſe feroit auſſi par le moyen d'une ficelle & d'un plomb, ſi le plan étoit horizontal ou de niveau; car pour-lors chaque point de la ficelle ſeroit le point cherché.

THEOREME VII.

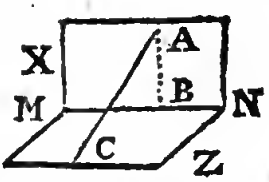
On ne peut d'un point ſur un plan élever qu'une perpendiculaire. Eucl. XI. Prop. 13. *fig. précéd.* 23

Que cela ne ſoit, concevons que ſur le même point *A*, on éleve les deux lignes *AE* & *AC* qu'on ſuppoſe perpendiculaires, & que de *A* comme centre on décrive *X* un cercle: les points *E* & *C* ſommets des deux lignes égales *AE* & *AC* étant differens ne peuvent être également éloignez de la circonference du cercle *X*; partant elles ne ſont pas toutes deux perpendiculaires ſur le plan *Z* *.

THEOREME VIII.

D'un point hors d'un plan on ne peut mener qu'une perpendiculaire ſur ce plan. 24

Soit *A* le point donné au deſſus d'un plan d'où on ſuppoſe qu'on a mené deux perpendiculaires, ſavoir *AB* & *AC*; je joins leurs piés *B* & *C* par la ligne *BC*. Ces trois points, *A*, *B*, *C*, font le triangle *ABC* qui ſe peut concevoir dans un



* *ſup. n.* 10.

même plan [a]. Les angles *ABC* & *ACB* que font les perpendiculaires *AB* & *AC*, ſont droits. Donc *ABC* auroit plus de deux angles droits; ce qui ne peut être [b].

COROLLAIRE.

25 *Si le plan* X *eſt perpendiculaire ſur le plan* Z, *& que de* A *point dans le plan* X *on abaiſſe une perpendiculaire ſur* Z, *cette ligne tombera ſur* MN *ſection de* X *&* Z. Eucl. XI. Prop. 38. (*Même figure.*)

Que cela ne ſoit, & qu'une perpendiculaire tombe de *A* ſur *C* hors de la ligne *MN*; j'abaiſſe *AB* perpendiculairement ſur *MN*; ainſi comme *B* eſt dans la ſection de *X* & de *Z*, il y a ſur *Z* deux perpendiculaires *AB* & *AC* menées d'un même point *A*; ce qu'on vient de voir être impoſſible.

THEOREME IX.

26 *La ligne perpendiculaire eſt la plus courte qu'on puiſſe mener d'un point hors d'un plan ſur ce plan.* (Figure ci-deſſus.)

Le point donné eſt *A*, la ligne *AB* eſt perpendiculaire, *AC* ne l'eſt pas. Il faut prouver que *AB*, eſt plus courte que *AC*. Pour cela je joins *C* & *B* par une ligne droite. Le triangle *ABC* ſe peut concevoir dans un même plan [c]. Or *AB* perpendiculaire ſur *BC*, eſt plus courte que l'oblique *AC* [d]; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

27 *Donc la meſure de la diſtance d'un point hors d'un plan, à ce plan, doit être une perpendiculaire.*

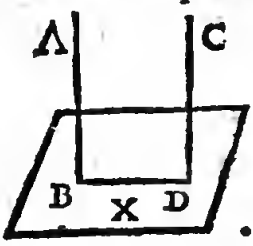
Puiſque cette perpendiculaire eſt la ligne la plus courte, & qu'on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire.

THEO-

a *ſup. n.* 9. b *L.* 2. *n.* 79. c *ſup. n.* 9. d *L.* 1. *n.* 53.

THEOREME X.

Deux lignes étant perpendiculaires sur un même plan, on les peut concevoir dans un même plan. 28



Concevons qu'on a mené par le pié des deux lignes *AB* & *CD* perpendiculaires sur *X*, une troiſieme ligne *BD*, ſur laquelle concevons que *AB* ou *CD* ſe meuve uniformément & toujours perpendiculairement, elles feront un plan [a]; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XI.

AB & CD (même figure) *perpendiculaires ſur le plan* X, *ſont paralleles; & ſi de deux paraleles l'une eſt perpendiculaire ſur le plan* X, *l'autre le ſera.* Eucl. XI. Prop. 6. & 8. 29

1°. Soit menée la ligne *BD* par le pié de *AB* & de *CD*, leſquelles lignes [b] ſont perpendiculaires ſur *BD*: donc ces trois lignes *AB*, *CD*, *BD* peuvent être dans un même plan [c]. Ainſi *AB* & *CD* étant perpendiculaires ſur *BD*, elles ſont paralleles [d].

2°. Si *AB* & *CD* ſont paralleles, & que *AB* ſoit perpendiculaire, je dis que *CD* le ſera auſſi; car ayant mené *BD*, la ligne *AB* ſera perpendiculaire ſur *ED* [e]: donc *CD* parallele à *AB*, eſt auſſi perpendiculaire ſur *BD* [f]; ce qu'il falloit prouver.

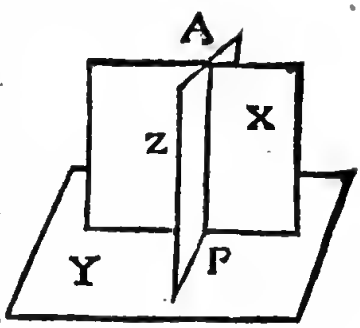
THEOREME XII.

La ſection AB *de deux plans* Z & X, *qui ſont perpendiculaires ſur* Y, *eſt une perpendiculaire ſur le même plan.* Eucl. XI. Prop. 19. 30

1°. Cette ſection eſt une ligne droite [g], & puiſque les plans *Z* & *X* ſont perpendiculaires

a *ſup. n.* 1. b *ſup. n.* 20. c *ſup. n.* 28. d *L.* 1. *n.* 68.
e *ſup. n.* 20. f *L.* 1. *n.* 69. g *ſup. n.* 10.

sur Υ, la ligne AP entant qu'elle eſt conſiderée en Z ne peut être conçue penchante de part & d'autre de Z: Et par la même raiſon, entant qu'elle eſt conſiderée en X, on ne peut pas concevoir qu'elle panche de côté ou d'autre de ce plan; partant on peut concevoir pour le moins trois points dans le plan Υ également éloignez de P, qui ſeront auſſi également éloignez de A; ainſi AP eſt perpendiculaire ſur le plan Υ *.



THEOREME XIII.

31 *La ſection de* X *& de* Z *étant perpendiculaire ſur* Y, *ces deux plans & quelque autre que ce ſoit dont* AP *ſera la ſection, ſeront perpendiculaires ſur* Y. Eucl. XI. Prop. 18. (*même fig.*)

Car tous ces plans peuvent être conçus faits par le mouvement de AP †.

THEOREME XIV.

32 *Si trois points dans un même plan, & non ſur une même ligne, ſont également diſtans d'un ſecond plan, ces deux plans ſont paralleles.*

La poſition d'un plan ne dépend que de trois points ‡; par conſéquent ſi trois points d'un plan ſont également diſtans d'un ſecond plan, ces deux plans ſont également diſtans dans tous leurs autres; ainſi ils ſont paralleles.

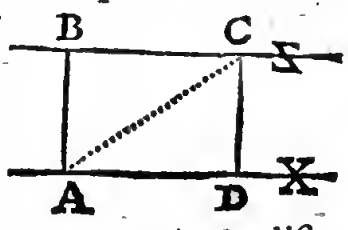
THEOREME XV.

33 *Les plans* X *&* Z *étant paralleles, ſi la ligne* AB *eſt perpendiculaire ſur* X, *elle le ſera auſſi ſur* Z. *Et ſi* AB *eſt perpendiculaire ſur* X *& ſur* Z, *ces deux plans ſont paralleles.* Eucl. XI. Prop. 14.

Si

* *ſup. n.* 17. † *ſup. n.* 12. ‡ *ſup. n.* 16.

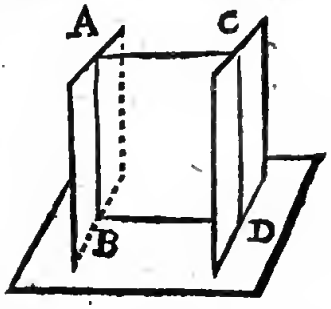
Si on prétend que *AB* perpendiculaire ſur *X* ne l'eſt pas ſur *Z*, concevons qu'on ait élevé au point *A* vers *Z* une ligne perpendiculaire telle que *AC*, elle ſera plus courte que *AB* *. De *C* je conçois une perpendiculaire ſur *X*, qui ſera encore plus courte que *AC*, partant plus que *AB*; ainſi le point *D* s'approchera plus de *Z* que *A*; ainſi *Y* & *Z* n'étant pas en égale diſtance, ils ne ſont pas paralleles; ce qui eſt contre l'hypotheſe. Une ligne donc qui eſt perpendiculaire ſur l'un de ces plans, l'eſt auſſi ſur l'autre. Le reſte eſt aiſé.



THEOREME XVI.

Les ſections AB & CD *de deux plans paralleles coupez par un troiſieme plan, ſont des lignes paralleles.* Eucl. XI. Prop. 16. 34

Ces ſections *AB* & *CD* ſont des lignes droites †, leſquelles ſont dans le troiſieme plan, où étant prolongées, elles ſe rencontreroient ſi elles n'étoient pas paralleles; par conſéquent les deux autres plans où elles ſont étant prolongez, ſe rencontreroient auſſi, ainſi ils ne ſeroient pas paralleles, contre la ſuppoſition. On ne peut donc pas dire que *AB* & *CD* ne ſont pas paralleles.

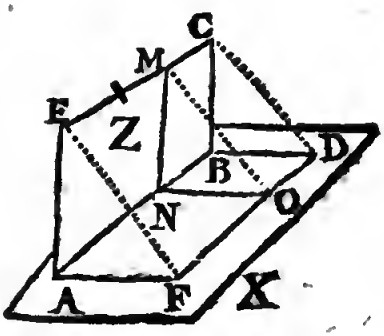


THEOREME XVII.

Les lignes droites paralleles à une même, quoique ſur differens plans, ſont paralleles entre elles. Eucl. XI. Prop. 9. 35

* *L. I. n. 53.* † *ſup. n. 10.*

Soit *CE* parallele à *AB*, à laquelle *DF* dans un autre plan eſt auſſi parallele ; je dis que *CE* & *DF* ſont paralleles entre elles.



Du point *B* j'éleve ſur *AB* perpendiculairement *BC* & *BD*, coupant *CE*, *DF*, aux points *C* & *D*. On peut concevoir un plan par les trois points *BCD* [a]; *AB* perpendiculaire, tant ſur *BD*, que ſur *BC*, ſera perpendiculaire ſur ce plan [b]; mais *CE* & *DF* étant poſées paralleles à *AB*, ſeront auſſi perpendiculaires ſur ledit plan & paralleles entre elles [c]; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XVIII.

36 *Toutes lignes paralleles dans le plan* X, *rencontrant d'autres lignes auſſi paralleles dans le plan* Z, *ſont entre elles les angles égaux.* Euclid. XI. Prop. 10. (*Même figure.*)

BD & *NO* ſont paralleles entre elles ſur le plan *X*; & *BC*, & *MN* ſur le plan *Z*: il faut prouver que l'angle *CBD* eſt égal à *MNO*. Pour cela je mene *DF* & *CE* paralleles à *AB*. Puiſque les paralleles entre paralleles ſont égales, car elles ſont les mêmes angles [d], par conſéquent égales [e]; puiſque, dis-je, *CE* eſt parallele à *DF* par le Théorême précedent: partant $BD = NO$ & $BC = NM$ & $CD = MO$; donc les triangles *CBD* & *MNO* ſont égaux & ſemblables, ainſi l'angle *CBD* eſt égal à *MNO*; ce qu'il falloit démontrer.

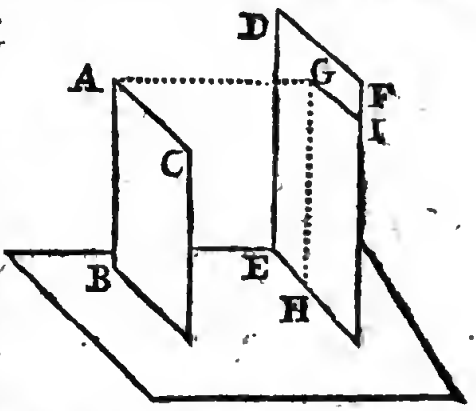
THEO-

a *ſup. n.* 9. b *ſup. n.* 19. c *ſup. n.* 29.
d *L.* 2. *n.* 27. e *L.* 2. *n.* 110.

THEOREME XIX.

Deux lignes AB & AC *qui ſe rencontrent au point* A, *& ſont paralleles à deux autres lignes* ED & DF *qui ſe rencontrent en* D, *ſi elles ne ſont point ſur un même plan, les plans* BC & EF, *ſont paralleles.* Eucl. XI. Prop. 15. 37

De *A* ſoit menée une perpendiculaire ſur le plan *EF* qu'elle rencontre au point *G*, duquel je mene *GH* parallele à *DE*, & *GI* parallele à *DF*: donc par le Théorême 17 *, *AB* & *GH* ſont paralleles, comme auſſi *AC* & *GI*: ainſi *AG* étant perpendiculaire ſur *GI* & ſur *GH* par la conſtruction, le ſera auſſi ſur *AC* & ſur *AB* †, & partant ſur le plan *BAC* ‡: ainſi il faut que ces deux plans ſoient paralleles; car s'ils ne l'étoient pas, ils ſe rencontreroient étant prolongez en quelque point, d'où aux points *A* & *G*, on pourroit mener des lignes droites qui ne ſeroient donc pas paralleles, contre ce qui a été démontré, puiſque *AG* étant perpendiculaire ſur leſdits plans, le doit être ſur toutes les lignes tirées ſur eux par les points *A* & *G* ‡; ce qui ne ſeroit pas, ſi ces lignes concouroient.



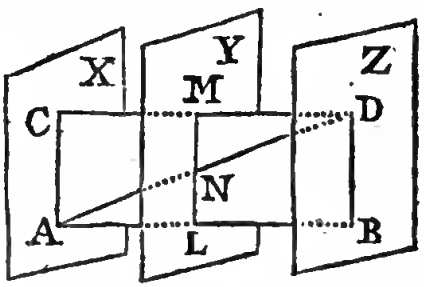
THEOREME XX.

Deux lignes droites coupées par des plans paralleles, ſont coupées proportionnellement. Eucl. XI. Prop. 17. 38

Soient deux lignes droites *AB*, *CD*, coupées

* *ſup. n.* 15. † *L. 1. n.* 69. ‡ *ſup. n.* 19. ‡ *ſup. n.* 20.

par trois plans paralleles *X*, *Y*, *Z*, aux points *A*, *L*, *B*, *D*, *M*, *C*; je dis qu'elles ſont coupées proportionnellement, c'eſt-à-dire *AL. LB :: CM. MD.*



Car ſur chaque plan des extrémitez *X* & *Z*, ſoient joints les points de ſection par les droites *AC* & *BD*, & tirée la diagonale *AD* rencontrant le plan *Y* au point *N*, duquel on tirera par les points de ſection *L* & *M* les lignes *LN* & *MN*. Le triangle *ABD* pourra être conçu dans un plan [a], comme auſſi celui *ADC* dans un autre, ſi ce n'eſt pas le même. Chacun des plans de ces triangles étant coupé par des plans paralleles, les lignes de ſection ſeront paralleles [b], & ces triangles ſeront ainſi coupez parallelement à leurs baſes, & partant *AL. LB :: AN. ND :: CM. MD* [c], & conſéquemment *AL. LB :: CM. MD* [d]; ce qu'il falloit prouver. La même choſe ſeroit, s'il y avoit plus de trois plans & plus de lignes.

SEC-

a *ſup. n.* 9. b *ſup. n.* 234. c *L.* 4. *n.* 16. d *L.* 5. *n.* 53.

SECTION II.

De la compoſition des Solides ſelon leurs ſurfaces, & ſelon leur ſolidité.

DEFINITION I.

39 *LOrſque trois ou pluſieurs angles plans, qui ſont ſur differens plans, ou qui n'ont pas une même baſe, ſe rencontrent dans leur ſommet, l'angle qu'ils comprennent ſe nomme* Solide.

Deux ſeuls angles plans ne peuvent renfermer un angle ſolide; ainſi pour le faire, il faut tout au moins trois angles plans, qui ſe coupent ou ſe rencontrent en aboutiſſant à un point, comme un diamant bien taillé.

DEFINITION II.

40 *Les ſolides compris entre des ſurfaces droites, ou plans paralleles, ſe nomment* Parallelépipedes.

DEFINITION III.

41 *Les ſolides qui ſont compris entre des plans tous égaux & ſemblables, ſont nommez* Polyedres. *On les nomme Réguliers, lorſque les figures qui les comprennent ſont régulieres, & que tous les angles ſont égaux.*

DEFINITION IV.

42 *Le nombre des faces planes d'un ſolide régulier, lui donnent un nom particulier.*

1°. *Il s'appelle* Tetraëdre, *lorſqu'il eſt compris ſous quatre triangles équilateraux & égaux.*

2°. Exaëdre, *quand il eſt compris ſous ſix quarrez égaux; c'eſt le cube, fait comme un dé à jouer.*

3°. Octaëdre, *lorſqu'il eſt compris ſous huit triangles égaux & équilateraux.*

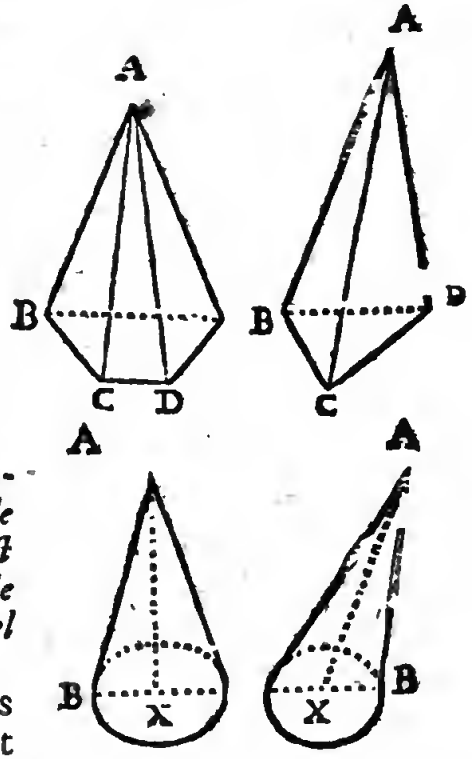
4°. Dodecaëdre, *lorſqu'il eſt compris ſous douze pentagones égaux & équilateraux.*

5°. Icoſaëdre, *lorſqu'il eſt compoſé de 20 triangles équilateraux & égaux.*

DEFINITION V.

43 *Une ligne, dont le ſommet eſt immobile, parcourant par le pié une figure;*

1°. *Si cette figure eſt un polygone, cette ligne décrira un ſolide, qu'on nomme* Pyramide, *tel que* ABCD.

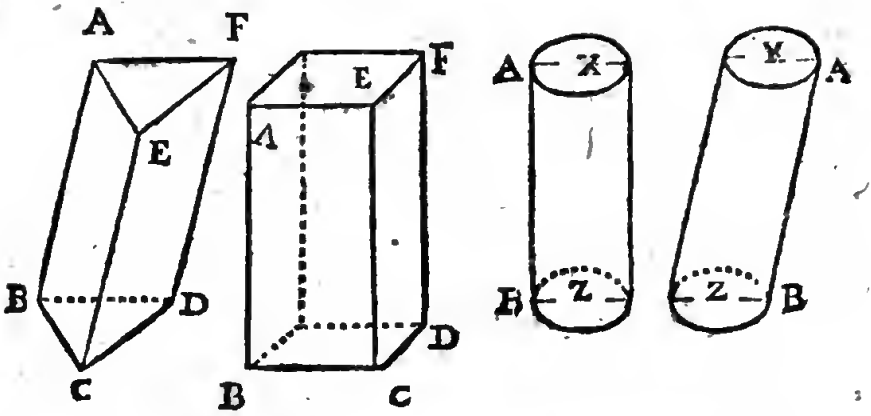


2°. *Si cette figure que parcourt le pié de la ligne eſt un cercle, le ſolide eſt un* Cône, *tel que* X.

Dans ces figures la ligne du ſommet au centre de la baſe, s'appelle l'Axe du Solide, qui ſe nomme droit ou oblique, ſi cette ligne fait un angle droit ou oblique ſur ſa baſe.

3°. *Si le ſommet de la ligne, qui décrit le ſolide, n'eſt pas immobile, & que dans le tems que ſon pié parcourt la baſe, ſon ſommet parcoure une figure égale, ſemblable, & ſemblablement poſée, telle qu'*ABCDEF; *ce ſera un* Priſme.

4.



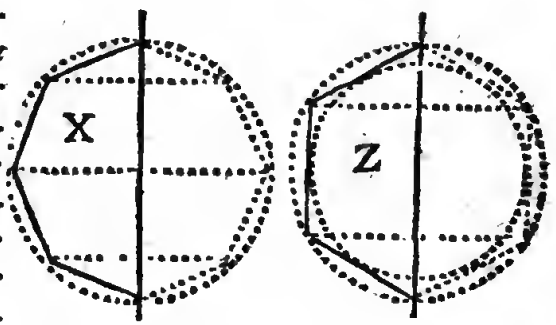
4°. *Si la baſe eſt un cercle, ce ſera un* cylindre, *tel que* ABXZ.

Definition VI.

Si un cercle tourne autour de ſon diametre, il 44
décrit une Sphere, *dont ce diametre s'appelle l'*Axe; *le centre du cercle, dont la révolution a fait la Sphere, eſt* le centre *de la Sphere; les lignes tirées de ce centre à la circonference en ſont* les rayons; *celles qui paſſent par le centre, & ſe terminent à la circonference, ſont les* diametres.

Definition VII.

Un polygone régulier en tournant ſur une ligne droite qui paſſe par ſon centre, décrit ce qu'on appelle un Sphéroïde, *c'eſt-à-dire, une eſpece de Sphere, tel qu'eſt* X & Z. 45



DEFINITION VIII.

46 *Un ſolide* A *eſt dit* circonſcrit *à un autre ſolide* B *qu'il contient, s'il eſt le plus petit de tous les ſolides ſemblables qui puiſſent renfermer* B; *ou bien, ſi* B *eſt le plus grand de tous les ſolides ſemblables que* A *peut renfermer.*

DEFINITION IX.

47 *Un ſolide* B *eſt dit* inſcrit *dans un autre ſolide* A *où il eſt renfermé, s'il eſt le plus grand de tous les ſolides ſemblables qui puiſſent être renfermez dans* A; *ou ce qui eſt la même choſe, ſi* A *eſt le plus petit de tous les ſolides ſemblables qui puiſſent le renfermer.*

DEFINITION X.

48 *Corps régulier eſt celui qui eſt compris entre des figures ſemblables, régulieres & égales, duquel auſſi tous les angles ſolides ſont égaux.*

On démontrera dans la ſuite, qu'il n'y a que cinq corps réguliers.

THEOREME I.

49 *Si un angle ſolide eſt compris de trois angles plans, deux de ces angles plans pris enſemble comme on voudra, ſont plus grands que le troiſieme.* Eucl. XI. Prop. 20.

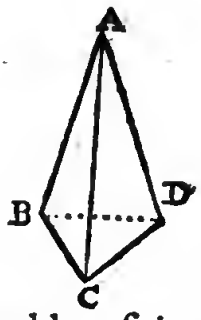
Les trois angles plans *BAD*, *BAC*, *CAD* font un angle ſolide; il faut prouver que deux de ces angles plans pris enſemble ſont plus grands que le troiſieme; que par exemple $BAD \angle BAG + CAD$. Entre les lignes *AB* & *AD*, aucun plan n'eſt plus petit que *BAD* *; partant le plan droit *BAD* eſt plus petit que le plan creux *ABCD*. On démontrera de la même maniere, que l'angle plan *BAC* eſt plus petit que *BAD* avec *CAD*.

Co-

* *ſup. n.* 3.

COROLLAIRE.

Les côtez des trois angles plans, qui font un angle ſolide, ayant été pris égaux, les baſes de ces trois angles plans, font un triangle. Eucl. XI. Prop. 22. (*Même figure.*) 50



Soient faits égaux les trois lignes *AB*, *AC*, *AD*, côtez des trois angles plans, qui font l'angle ſolide *A*; il faut démontrer que les trois lignes *BC*, *CD*, *DB*, baſes des trois angles plans *BAC*, *CAD*, *DAB*, font un triangle. Pour cela* il ſuffit que deux de ces lignes priſes enſemble, ſoient plus grandes que la troiſieme. Or cela eſt ainſi, car ces deux angles dont ces lignes ſont les baſes, ſeront plus grands que l'angle qui eſt ſur la troiſieme; & par conſéquent cette troiſieme ligne eſt plus petite †.

THEOREME II.

Tous les angles plans qui comprennent un angle ſolide, valent moins que quatre angles droits. Eucl. XI. Prop. 21. 51

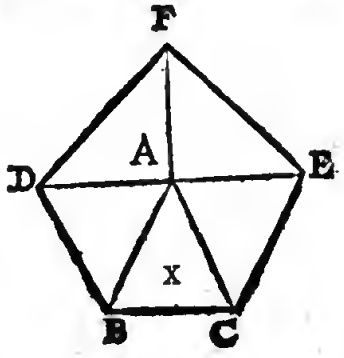
1°. Commençons par l'angle ſolide *A*, compoſé de trois plans: par le Théorême précédent les angles *BCA* + *DCA* ſont plus grands que l'angle *BCD*, & de même *ADC* + *ADB* plus grands que *CDB*; comme auſſi *ABD* + *ABC* plus grands que *DBC*. Ainſi les ſix angles des baſes des trois triangles qui forment l'angle ſolide *A*, ſont plus grands que les trois triangles du triangle *BCD*, c'eſt-à-dire, plus grands que deux droits ‡. Or tous les angles des trois triangles qui forment ledit angle ſo-

* *L.* 2. *n.* 67. † *D.* 2. *n.* 104. ‡ *L.* 2. *n.* 75.

ſolide *A*, ſont enſemble égaux à ſix droits *. Si donc de cette ſomme on ôte plus que deux droits, valeur des ſix angles ſur la baſe, il reſtera moins de quatre droits pour la valeur de l'angle ſolide *A*; ce qu'il falloit prouver.

2°. Par la même méthode on montrera que les angles ſolides formez par quatre plans, ſont auſſi moindres que quatre droits.

3°. Si *X* eſt un triangle ſolide compris par cinq triangles, dont le ſommet doit être conçu en l'air, on prouvera auſſi que l'angle *DBC* eſt plus petit que les deux angles *DBA* & *CBA*, par le Théorême précédent, & l'angle *BCE* eſt plus petit que les angles *ACB* & *ACE* pris enſemble, de même des autres. Mais auſſi tous les angles du polygone *BCEFD*, baſe de l'angle ſolide, ſont égaux à ſix angles droits †; ainſi tous les angles de la baſe des cinq triangles qui font l'angle ſolide *X* ſont plus grands que ſix droits, puiſqu'ils ſont plus grands que les angles du polygone, comme on vient de voir. Tous les angles de ces cinq triangles qui font l'angle ſolide valent dix droits; donc puiſque ceux de leurs baſes valent plus de ſix droits, ceux des ſommets valent moins que quatre droits: ce qu'il falloit démontrer.



On peut démontrer ce Théorême en cette maniere. Concevons, 1°. *que* A *eſt un point dans un plan, & le ſommet de pluſieurs triangles dont les côtez de* X *ſont les baſes. Tous ces angles autour*

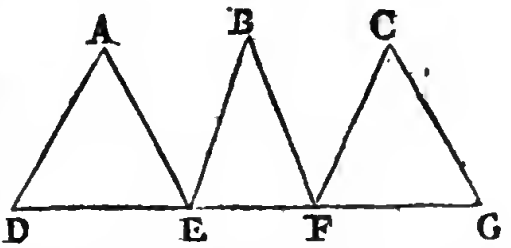
* *L. 2. n. 75.* † *L. 2. n. 123.*

tour de A *ne valent que quatre angles droits*, 2°. *Si on leve le point* A, *alors les angles du ſommet de ces triangles deviendront plus petits*, * *ayant mêmes baſes & les côtez plus grands*; *ce qui étant, tous ces angles vaudront moins que quatre angles droits.*

PROBLEME I.

Ayant trois triangles plans, dont deux pris enſemble ſont plus grands que le troiſieme, mais qui tous enſemble ſont moindres que quatre angles droits, faire un angle ſolide. Euclid. XI. Prop. 23. 52

Soient ces trois triangles plans *A*, *B*, *C*, il n'y a qu'à les joindre en un même point de maniere, que les côtez qui les renferment conviennent enſemble, c'eſt-à-dire, que *AE* s'uniſſe avec *BE*, *BF* avec *CF*, & *CG* avec *AD*; cela formera l'angle ſolide demandé, ſuivant la Définition †.



PROBLEME II.

Sur une ligne droite donnée, & à un point donné en cette ligne, faire un angle ſolide égal à un angle ſolide donné. Eucl. XI. Prop. 26. 53

Soit une ligne donnée *AD*, & *A* un point dans cette ligne, il faut faire au point *A* un angle ſolide donné. Soient les trois plans de cet angle donné *DAE*, *EBF*, *FCG*; ayant fait trois autres plans égaux, & les joignant au point *A* en la maniere qu'il vient d'être expliqué au précédent Problême, il eſt évident qu'ils feront l'angle ſolide requis.

THEO-

* *L. 2. n 99.* † *ſup. n. 39.*

THEOREME III.

54 *S'il y a deux angles plans égaux, aux ſommets deſquels on leve en l'air deux lignes droites, faiſant angles égaux avec les lignes des angles premierement poſez chacun au ſien: & d'un point pris au haut de chacune de ces deux lignes élevées, ſont menées des lignes perpendiculaires aux plans où ſont les angles premierement poſez, & des points où tombent ces perpendiculaire, ſont tirées des lignes droites vers les ſommets des angles premierement poſez: les angles que font ces lignes avec les levées en l'air, ſont égaux entre eux.* Eucl. XI. Prop. 35.

Euclide fait cette Propoſition, pour démontrer d'autres Propoſitions dans la ſuite de ſes Elémens. Je n'en ai pas beſoin; ainſi je la paſſe.

THEOREME IV.

55 *Il ne peut y avoir plus de cinq differens corps réguliers.*

C'eſt-à-dire, cinq differens ſolides compris ſous des figures planes régulieres toutes égales & ſemblables, & dont tous les angles ſoient égaux. Dans une Sphere, tout eſt égal; mais il s'agit d'un ſolide compris ſous des plans. On a prouvé que tous les angles plans, qui comprennent un angle ſolide, valent moins que quatre angles droits. Voyons quelles ſont les figures planes, ſemblables, régulieres, égales, qui puiſſent faire un angle ſolide.

1°. Trois triangles égaux & équilateraux peuvent faire un angle ſolide, car les trois angles de ces triangles qui comprendront un angle ſolide, ne valent que trois fois ſoixante degrez, chacun des angles d'un équilateral étant de ſoixante. Trois de ſes triangles joints enſem-

ſemble en pourront donc faire un, tel que ſont ceux du Tetraëdre.

2°. Quatre de ces triangles peuvent encore faire un angle ſolide ; car les quatre angles qu'ils comprendront ne valent que quatre fois ſoixante ; ce qui eſt moins que quatre droits. L'Octaëdre eſt fait de quatre de ces triangles.

3°. Cinq de ces triangles peuvent encore faire un angle ſolide, car les angles des plans qu'ils comprennent, ne valent que cinq fois ſoixante degrez ; ce qui eſt moins que quatre angles droits. L'angle de l'Icoſaëdre eſt fait par cinq de ces triangles.

Six triangles équilateraux ne peuvent faire un angle ſolide ; car les ſix angles plans qu'ils comprennent, valent quatre angles droits, ſix fois ſoixante faiſant trois cens ſoixante valeur de quatre angles droits ; ainſi ces ſix triangles feroient un angle plan, & non un angle ſolide *.

4°. Trois angles d'un quarré peuvent faire un angle ſolide ; car ils valent moins que quatre angles droits. L'angle du cube eſt compoſé de trois angles du quarré. On ne peut concevoir d'autre ſolide fait de quarrez : car quatre ne peuvent faire un angle ſolide ; à plus forte raiſon, ni cinq, ni ſix.

5°. Trois pentagones peuvent faire un angle ſolide ; car leurs angles ne font que 324 degrez, ce qui eſt moins que quatre angles droits. Chaque angle du Dodecaëdre eſt fait de trois pentagones. Plus de trois pentagones ne peuvent faire un angle ſolide ; car quatre font 432, ce qui paſſe la valeur de quatre angles droits.

Trois hexagones ne peuvent faire un angle ſoli-

li-

* *Sup. n.* 58.

lide; car chacun étant de 120 degrez, les trois font 360, qui valent quatre droits: ainſi ils ne peuvent pas faire un angle ſolide *. Plus eſt grand le nombre des côtez d'un polygone, l'angle de la figure eſt plus grand; ainſi ſi trois hexagones ne peuvent faire un angle ſolide, à plus forte raiſon trois heptagones ne le peuvent pas; ainſi il n'y a que le triangle équilateral, le quarré & le pentagone, qui le puiſſent: mais on peut faire un angle ſolide de trois équilateraux, de quatre & de cinq; il ne peut donc y avoir que cinq differens corps réguliers.

PROPOSITIONS EVIDENTES.

Proposition I.

56 *Une figure eſt plus grande que celle autour de laquelle elle eſt circonſcrite, & plus petite que celle dans laquelle elle eſt inſcrite.*

Proposition II.

57 *De deux Priſmes de même hauteur, celui dont la baſe eſt moindre, & qui par conſéquent peut être compriſe en celle de l'autre, eſt plus petit.*

Car il eſt évident qu'il y eſt contenu. Or ce qui contient, eſt plus grand, que ce qui eſt contenu.

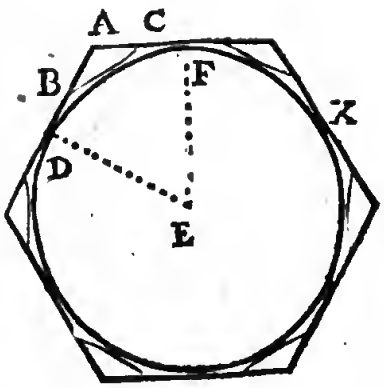
Proposition III.

58 *De deux Priſmes circonſcrits à un cylindre, celui-là approche plus du cylindre, qui a plus de côtez.*

La baſe du cylindre propoſé eſt *X*; celle du priſme qui a moins de côtez, & qui eſt circonſcrit au cylindre, ſoit nommée *Y*, & *Z* celle d'un

* *ſup. n.* 51.

d'un autre prisme qui a plus de côtez, & qui est circonscrit au même cylindre. Le polygone *Z* * est plus petit que le polygone *Y*: les prismes dont ces polygones sont les bases, sont de même hauteur, étant circonscrits à un même cylindre, donc † celui qui sera sur *Z*, & qui a ainsi plus de côtez, est plus petit que celui qui en a moins, & dont *Y* est la base; ainsi il approche plus du cylindre; ce qu'il falloit démontrer.



Proposition IV

Donc un prisme d'une infinité de côtez approche si près du cylindre, qu'il n'y a point de difference; ainsi on peut supposer que le cylindre est un prisme d'une infinité de côtez. 59

Proposition V.

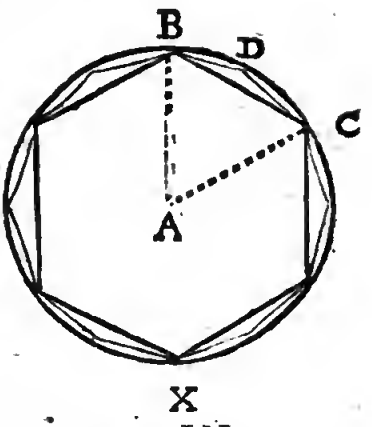
De deux prismes inscrits dans un cylindre, celui-là approche plus du cylindre, qui a plus de côtez. 60

La base du cylindre proposé est *X*, les deux polygones *Z* & *Y* inscrits dans ce cercle soient les bases de deux prismes inscrits dans ce cylindre dont *X* est la base.

Le polygone *Y* qui a plus de côtez est plus grand, & approche plus du cercle que le polygone *Z* ‡. Ces deux prismes, dont *Z* & *Y*

* *L.* 2. *n.* 149. † *sup. n.* 57. ‡ *L.* 2. *n.* 151.

Y ſont les baſes, ſont de même hauteur, étant inſcrits dans un même cylindre ; donc le priſme qui eſt ſur *Y* eſt plus grand, que celui qui eſt ſur *Z* *. Ainſi il approche plus du cylindre ; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION VI.

61 *De deux pyramides de même hauteur, celle qui a une plus grande baſe eſt la plus grande.*

Car il eſt évident que ſi l'on conçoit que l'une ſoit miſe dans l'autre, celle qui a une plus grande baſe contiendra celle qui en a une plus petite.

PROPOSITION VII.

62 *De deux pyramides circonſcrites à un cône, celle qui a plus de côtez approche plus du cône.*

PROPOSITION VIII.

63 *De deux pyramides inſcrites dans un cône, celle qui a plus de côtez approche plus du cône.*

PROPOSITION IX.

64 *Donc on peut ſuppoſer qu'un cône eſt une pyramide d'une infinité de côtez.*

PROPOSITION X.

65 *Plus un polygone a de côtez, le ſpheroïde qu'il forme approche plus de la ſphere autour de laquelle il eſt circonſcrit.*

Car plus le polygone, qu'on peut appeller le Générateur du ſpheroïde, aura de côtez, plus il

* *ſup. n. 56.*

il approchera du cercle ; ainſi le ſpheroïde qu'il décrira par ſa révolution approchera plus de la ſphere à laquelle il eſt circonſcrit ; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

Donc une ſphere peut être priſe pour un ſpheroïde formé par un polygone d'une infinité de côtez. 66

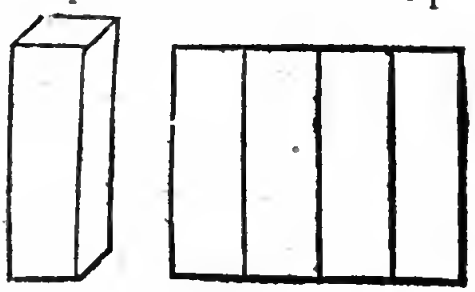
SECTION III.

De la ſurface des Solides.

THEOREME I.

LA ſurface d'un priſme droit eſt égale à un parallelogramme qui eſt de même hauteur que ce priſme, & dont la baſe eſt égale au circuit de ce priſme. 67

Les ſurfaces d'un priſme droit ſont des parallelogrammes tous de même hauteur, dont les baſes priſes enſemble font le circuit de ce priſme : ils ſont donc égaux à un parallelogramme de la hauteur du priſme, & dont la baſe eſt égale à ſon circuit ; ce qui eſt évident.

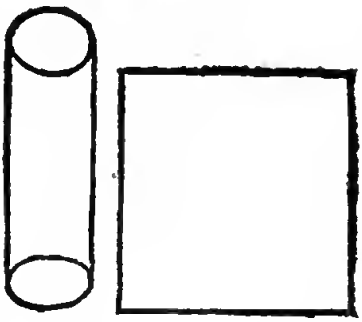


On n'y comprend point les ſurfaces des baſes.

Co-

COROLLAIRE I.

68 *Donc puiſqu'un cylindre droit peut être pris pour un priſme * d'une infinité de côtez, ſa ſurface eſt égale à un parallelogramme de même hauteur, dont la baſe eſt égale à la circonference du cercle, qui eſt la baſe du cylindre.*



COROLLAIRE II.

69 *Donc tout ce qui a été démontré de la raiſon qu'ont les parallelogrammes entre eux, convient aux ſurfaces des cylindres.*

1°. Les ſurfaces de deux cylindres ſont l'une à l'autre en raiſon compoſée de leur hauteur, & du circuit de leur baſe.

2°. Dans deux cylindres, ſi la hauteur eſt à la hauteur comme la baſe à la baſe, c'eſt-à-dire, ſi la raiſon de leurs ſurfaces eſt compoſée de deux raiſons égales, cette raiſon eſt doublée †.

3°. Si deux cylindres ont leurs hauteurs ou leurs baſes égales, leurs ſurfaces ſont entre elles comme les inégales ‡.

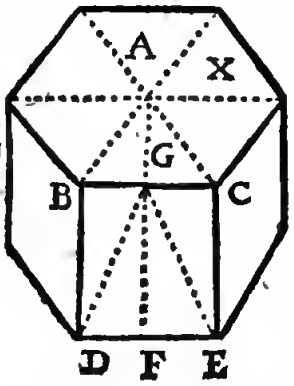
THEOREME II.

70 *La ſurface d'un priſme eſt double de celle du polygone qui eſt ſa baſe, s'il a pour hauteur l'apothême de ce polygone.*

Soit *Z* un priſme, dont le polygone *X* eſt ſa baſe. L'apothême de *X* eſt *AG*, c'eſt-à-dire, une perpendiculaire tirée de ſon centre *A* ſur *BC* un de ſes côtez; il faut démontrer que ſi *FG*,

* *ſup.* n. 59. † *L.* 4. n. 71. ‡ *L.* 4. n. 75.

FG, hauteur de *Z* eſt égale à *AG* apothême de *X*, la ſurface de *Z* ſera double de *X*.



Ayant mené de tous les angles du polygone *X* des lignes au centre *A*, on fait autant de triangles que *Z* a de faces, leſquelles faces ſont des parallelogrammes. Or ces parallelogrammes, comme eſt *BCED*, & ces triangles comme eſt *ABC*, ont même hauteur & même baſe : donc ces parallelogrammes ſont doubles de ces triangles *, & par conſéquent la ſurface de *Z* compoſée de ce parallelogramme eſt double de celle de *X*, égale à tous ces triangles.

Corollaire I.

Donc ſi la hauteur d'un cylindre qu'on peut regarder comme un priſme eſt égale au rayon du cercle qui eſt ſa baſe, ſa ſurface ſera double de celle du cercle. 71

Corollaire II.

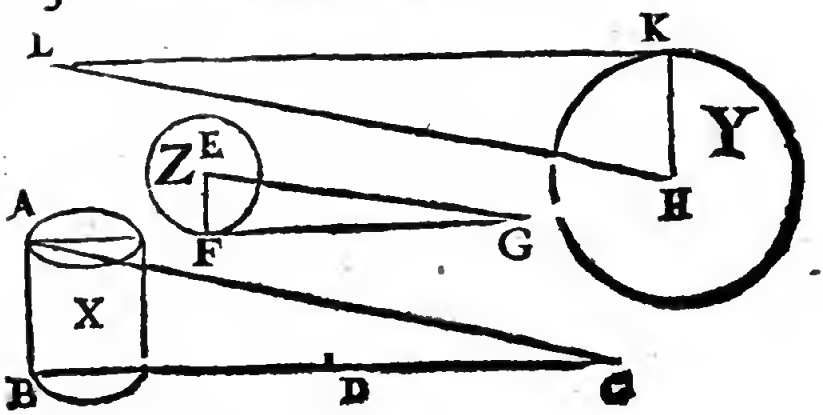
Ainſi ſi un cylindre a pour ſa hauteur deux fois le rayon, ou une fois le diametre du cercle qui eſt la baſe, ſa ſurface ſera quatre fois plus grande que celle de ce cercle. 72

Theoreme III.

La ſurface du contour d'un cylindre eſt égale à celle d'un cercle, dont le rayon eſt moyen proportionnel entre la hauteur de ce cylindre & le diametre du cercle qui eſt la baſe. Archimede I. Prop. 16. 73

X eſt un cylindre, dont *AB* eſt la hauteur, *BD* le circuit de ſa baſe, qui eſt le cercle *Z*, dont le circuit eſt *FG* ou *BD*, & *BC* le double de

* L. 2. n. 33.



de ce circuit. La ſurface de *X* eſt égale au parallelogramme *ABD* ou au triangle *ABC*, comme celle du cercle *Z* au triangle *EFG**. Je ſuppoſe que *HK* rayon du cercle *Y*, eſt moyen proportionnel entre la hauteur de *X*, & 2 *EF* diametre de *Z*.

Soit *KL* le circuit de *Y*, ainſi ſa ſurface eſt égale au triangle *HKL* : il n'eſt donc queſtion que de prouver que le triangle *HKL* eſt égal au triangle *ABC* : car dans tous les cercles il y a une même raiſon entre le rayon & la circonference.

Par l'hypotheſe ∴ *AB. HK. 2EF.* Or *HK. KL* :: *2EF. 2FG* ou *BC*; & *alternando HK. 2EF* :: *KL BC* : donc puiſque *AB. HK* :: *HK. 2EF* :: *KL. BC*. Ainſi *AB. HK* :: *KL. BC* †, partant $AB \times BC = HK \times KL$ ‡. Or les triangles *ABC* & *HKL* ſont les moitiez de ces rectangles ; ils ſont donc égaux ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME IV.

74 *La ſurface d'une pyramide eſt égale à un triangle, dont la hauteur eſt égale à la hauteur de chacune de ſes faces, & dont la baſe eſt égale*

* *L. 2. n. 154.* † *L. 3. n. 53.* ‡ *L. 3. n. 56.*

égale au circuit de la baſe de cette pyramide, ou à un parallelogramme de même hauteur, dont la baſe eſt la moitié plus petite. Archimede I. Prop. 10. & 11.

Chacune des faces de la pyramide eſt un triangle; ces faces étant égales, ces triangles ſont égaux entre eux, & à un triangle rectangle de même hauteur, & dont la baſe eſt égale à toutes les baſes priſes enſemble de ces triangles *. Or ce triangle eſt égal à un parallelogramme de même hauteur, dont la baſe eſt moitié plus petite †, qui eſt ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE I.

Donc puiſque les cônes peuvent être conſiderez comme des pyramides, la ſurface d'un cône eſt égale à un triangle rectangle de même hauteur que le côté du cône, & dont la baſe eſt égale au circuit de la baſe du cône, ou à un parallelogramme rectangle de même hauteur, dont la baſe eſt égage à la moitié de ſa baſe. 75

La hauteur de la ſurface du cône & de la pyramide eſt une ligne droite la plus courte qu'on puiſſe concevoir, menée ſur la ſurface depuis le ſommet juſqu'à ſa baſe.

COROLLAIRE II.

Tout ce qui a donc été démontré des raiſons & des proportions, entre pluſieurs rectangles ſemblables, convient aux ſurfaces des cônes. 76

1°. Les ſurfaces des cônes ſont entre elles en raiſon compoſée de leur hauteur & de leur baſe.

2°. Si la hauteur eſt à la hauteur comme la baſe à la baſe, ces ſurfaces ſeront en raiſon doublée.

3°. Si les deux cônes ont leur hauteur ou leur baſe égale, leurs ſurfaces ſeront entre elles comme les inégales.

4°. Donc puiſque les circonferences des cercles

* *L.* 2. *n.* 143. † *L.* 2. *n.* 133.

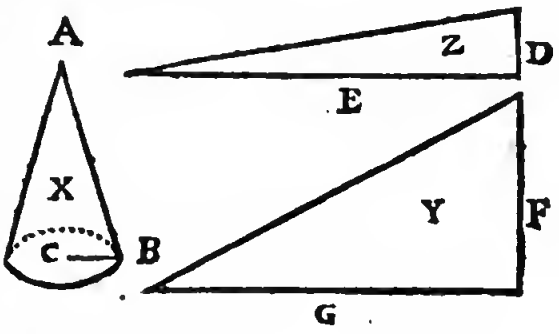
cles ſont entre elles comme leurs diametres, deux cônes ayant même hauteur, leurs ſurfaces ſont entre elles comme les diametres de leurs baſes.

5°. Un rectangle étant donné, on en peut trouver un ou pluſieurs ſemblables qui ayent une telle raiſon avec lui; auſſi un cône étant donné, on peut trouver un ou pluſieurs autres cônes auſſi ſemblables, qui ſoient avec le donné en raiſon requiſe.

THEOREME V.

77 *La ſurface du cône* X *eſt à celle du cercle* BCD, *qui eſt ſa baſe, comme* AB *hauteur de ſa ſurface eſt au rayon de ce cercle.* Archimede I. Prop. 18.

La ſurface de ce cercle eſt égale au triangle rectangle *Z* dont le côté *D* eſt égal au rayon *BC*, & le côté *E* au circuit du cercle *.



La ſurface du cône *X* eſt égale au triangle rectangle *Y*, dont le côté *F* eſt égal à *AB*, & le côté *G* au circuit de ſa baſe †.

G & *E* étant égaux chacun au circuit du cercle, qui eſt la baſe du cône, ils ſont égaux entre eux; partant les ſurfaces de ces deux triangles rectangles *Y* & *Z*, qui ont des baſes égales, ſavoir *G* & *E*, ſont entre elles comme *F* à *D* ‡; mais *AB* = *F*, & *BC* = *D*: donc *X* ſurface du cône, eſt à celle du cercle de ſa baſe comme *AB* hauteur de ſa ſurface eſt à *BC* rayon du cer-

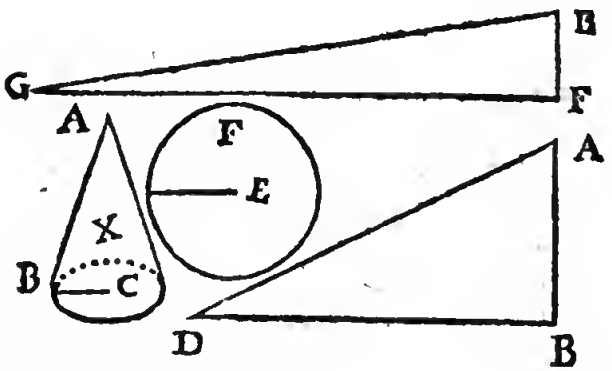
* *L.* 1. *n.* 154. † *ſup n.* 75. ‡ *L.* 4. *n.* 75.

cercle de ſa baſe; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VI.

La ſurface d'un cercle dont le rayon eſt moyen proportionnel entre la hauteur du cône, & le rayon de la baſe de ce cône, eſt égal à la ſurface de ce cône. Archimede I. Prop. 17. 78

Soit *X* un cône dont *AB* eſt la hauteur de ſa ſurface, & *BD* le circuit qui eſt ſa baſe; ainſi ſa ſurface eſt égale au triangle rectangle *ABD*. La ligne *BC* eſt le rayon de ſa baſe. Je ſuppoſe que *EF* eſt moyen proportionnel entre *AB* & *BC*, & que *EF* eſt le rayon d'un cercle dont *FG* eſt le circuit; ainſi la ſurface de ce cercle eſt égale au triangle *EFG*: par conſéquent il n'eſt queſtion que de prouver que $ABD = EFG$.



Par l'hypotheſe *AB*. *EF*:: *EF*. *BC*: & puiſque les circonferences des cercles ſont entre elles comme leurs diametres, *EF*. *BC*:: *FG*. *BD*. Ainſi *AB*. *EF*:: *EF*. *BC*:: *FG*. *BD*. Donc *AB*. *EF*:: *FG*. *BD*; partant $AB \times BD = EF \times FG$ *. Or *ABD* eſt moitié de $AB \times BD$ †, comme auſſi *EFG* eſt moitié de $EF \times FG$. Ces triangles ſont donc égaux; ce qu'il falloit prouver.

* *L.* 3. *n.* 56. † *L.* 2. *n.* 133.

THEOREME VII.

79 *Si la hauteur & la baſe d'un priſme ſont égales à la hauteur & la baſe d'une pyramide droite, la ſurface du priſme ſera double de celle de la pyramide.*

Chaque face du priſme eſt un parallelogramme, & chaque face de la pyramide eſt un triangle. Dans le cas propoſé ces parallelogrammes & ces triangles ſont de même hauteur, & ſur même baſe: donc * ces parallelogrammes ſont doubles de ces triangles; ainſi la ſurface du priſme eſt double de celle de la pyramide; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

80 *Donc les cônes pouvant être conſiderez comme des pyramides, & les cylindres comme des priſmes, on peut dire que la ſurface du cylindre eſt double de celle du cône de même hauteur & ſur même baſe.*

Remarquez qu'il ne faut pas confondre la hauteur abſolue de la pyramide, avec celle des ſurfaces planes qui la forment: la premiere eſt une ligne menée perpendiculairement de la pointe de la pyramide ſur le plan qui lui ſert de baſe; & la deuxieme une autre ligne menée auſſi perpendiculairement de la pointe, mais ſur un côté du polygone qui lui ſert de baſe, laquelle ligne eſt plus longue que la premiere. Il en eſt de même des cônes, dont les hauteurs ou axes ſont differentes de celles des côtez.

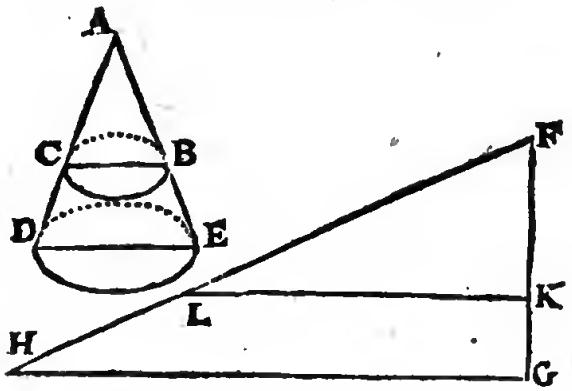
LEMME I.

81 *La ſurface de* BCDE, *fragment du cône* ADE, *eſt égale à celle du trapeze* GHLK.

La ſurface du cône *AED* eſt égale au triangle

* *L.* 2. *n* 133.

gle rectangle *FGH* dont *FG* = *AD*, & *GH* égale à la circonference du cercle *DE**, & celle du cône *ABC* au triangle rectangle *FKL*

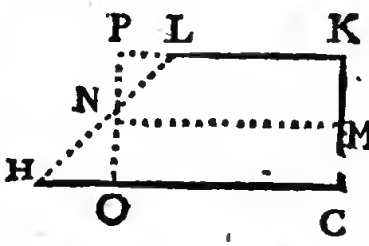


dont *FK* = *AB* & *KL* à la circonference du cercle *CB*: ôtant donc *FKL* de *FGH*, le reste *GHLK* sera égal au fragment *BCDE*, ce qui est évident.

LEMME II.

HC & KL *sont les rayons des cercles des deux bases d'un fragment de cône.* KC *est coupé en* M *par la moitié*, & MN *est parallele à* KL & HC: *je dis que la surface de ce fragment est égale au rectangle fait de* KC *hauteur de cette surface*, & *de la circonference d'un cercle, dont* MN *est le rayon.* 82

Car la figure *CKLH* = *OCKP*, à cause de l'égalité des deux triangles *HON* & *NPL*, ajoutez ou retranchez; mais la figure *CKLH* est à celle qui vient d'être prouvée égale au fragment du cône, en raison du rayon du cercle à sa circon-

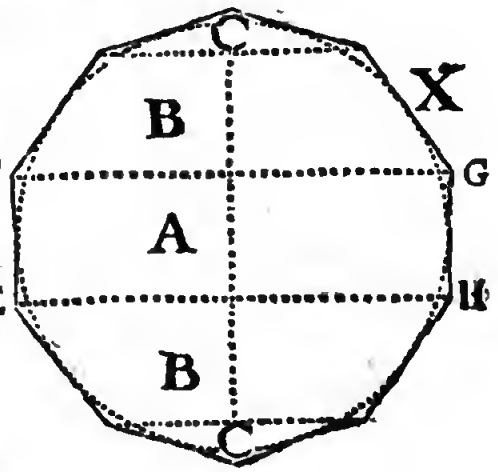


* *sup.* n. 74.

conference *. Et *OCKP* eſt auſſi en même raiſon au rectangle fait de *KC* par la circonférence du cercle dont *MN* eſt rayon; partant ce rectangle eſt égal au fragment †, ce qu'il falloit démontrer.

LEMME III.

83 *Si l'on joint les angles d'un ſpheroïde comme* X, *par des plans perpendiculaires à ſon axe qui le diviſent en pluſieurs parties, ces parties ſeront ou des cônes comme* C, *ou des fragmens de cône comme* B, *ou cylindres comme* A.



Cela eſt évident.

THEOREME VIII.

84 *Chaque ſurface des portions d'un ſpheroïde eſt égale au rectangle fait de la partie de l'axe à laquelle elle répond, & de la circonférence du cercle ou ſphere inſcrite dans ce ſpheroïde.*

Pour la partie A.

Quant à la partie *A*, il n'y a pas de difficulté, puiſque c'eſt un cylindre dont la ſurface ‡ eſt égale au rectangle de *EF* par la circonference d'un cercle dont le diamettre eſt *EH*, lequel eſt égal au diametre du cercle ou ſphere inſcrite dans le ſpheroïde *X*; ce qu'il falloit prouver.

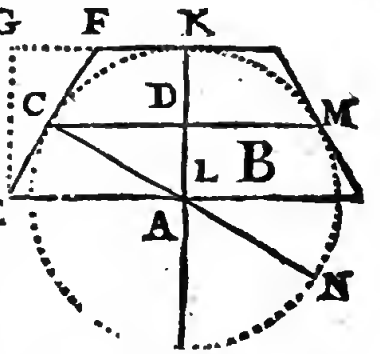
Pour

* L. 4. n. 75. † L. 3. n. 52. ‡ *Sup.* n. 68.

Pour la partie B.

Il faut démontrer que la ſurface de la partie *B*, qui eſt un fragment de cône, eſt égale à un rectangle fait de *KL* partie de l'axe du ſpheroïde à laquelle elle répond, & de la circonference d'un cercle inſcrit audit ſpheroïde, dont *CN* eſt le diametre. (*Figure ſuivante*)

Je partage cette hauteur *KL* par la moitié, menant *CM* parallele à *FK* & à *EL*: je mene auſſi *GE* parallele à *KL* à laquelle elle eſt égale. Les triangles *EFG* & *ACD* ſont rectangles; ainſi *GFE* & *GEF* valent un droit, l'angle *GFE* étant donc égal *FCD* [a], retranchant de l'angle droit *FCA*, l'angle *FCD*, le reſte *DCA* ſera égal à *GEF*, ainſi les deux triangles *ACD* & *EFG* ſont équiangles: donc *GE* ou *KL*. *EF*:: *CD*. *CA* [b], partant *KL* eſt à *EF* comme le double de *CD*, qui eſt *GM*, eſt au double de *AC* qui eſt *CN*. Soit *CM* diametre d'un cercle dont Υ eſt la circonference; & *CN* celui d'un cercle dont *Z* eſt la circonference. Donc *CM*. *CN* :: Υ. *Z*. Donc *KL*. *EF*:: Υ. *Z*. Donc *KL* × *Z* = *EF* × Υ [c]. Or la ſurface de *B*, fragment de cône, eſt égale à *EF* × Υ [d]. Donc cette ſurface égale à *EF* × Υ, eſt égale à un rectangle fait de *KL* par *Z* circonference d'un cercle dont *CN* eſt le diametre; ce qu'il falloit prouver.

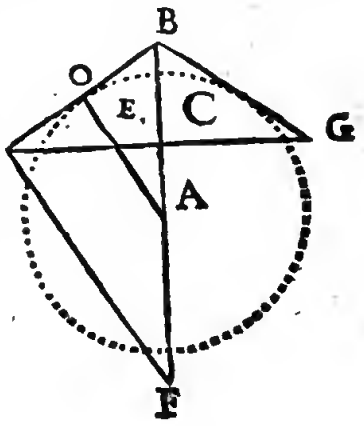


Pour la partie C.

De *O* moitié de *BD* côté du cône *C*, je mene

a *L.* 2. *n.* 25. b *L.* 4. *n.* 10. c *L.* 3. *n.* 56. d *ſup. n.* 82.

à *A*, centre du cercle qui eſt inſcrit dans le ſpheroïde, la ligne *AO*, & par *D* une parallele à *AO*; ainſi comme *BG* eſt moitié de *BD*, *AO* ſera moitié de *DF*; partant *DF* ſera le diametre du cercle dont *AO* eſt le rayon. La ſurface du cône *C* eſt égale à un triangle rectangle dont *BD* eſt la hauteur, & la baſe eſt un cercle dont *DG* eſt le diametre [a], ou à un parallelogramme rectangle de même hauteur *BD*, & dont la baſe eſt la moitié de celle d'un cercle dont *DG* eſt le diametre [b], ou ce qui eſt la même choſe, dont la baſe eſt égale à un cercle dont *DE* eſt le diametre. Soit nommé Υ la circonference de ce cercle, & *Z* celle du cercle dont *DF* eſt le diametre: il faut prouver que $BD \times \Upsilon = BE \times Z$.



Les deux triangles *DEF* & *DEB* ſont ſemblables [c]: Donc *BD*. *BE*:: *DF*. *DE*. Or *DF*. *DE*:: *Z*. Υ [d]: donc *BD*. *BE*:: *Z*. Υ [e]: donc $BD \times \Upsilon = BE \times Z$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME IX.

85 *La ſurface d'un ſpheroïde eſt égale au rectangle fait de ſon axe, par la circonference du cercle de la ſphere qui lui eſt inſcrite.*

Par le Theorême précédent, puiſque la ſurface de chaque partie du ſpheroïde eſt égale au rectangle, faite de chaque partie de ſon axe à laquelle elle répond, & de la circonference du

a *ſup.* n. 75. b *L.* 2. n. 133. c *L.* 4. n. 27.
d *L.* 4. n. 42. e *L.* 3. n. 56.

du cercle de la ſphere qui lui eſt inſcrite, toute la ſurface entiere ſera égale au rectangle de tout l'axe par la circonference du cercle de la ſphere qui lui eſt inſcrite, puiſque le tout & ſes parties ſont un produit égal quand ils ſont multipliez par une même grandeur *.

THEOREME X.

La ſurface d'une ſphere eſt égale au rectangle de ſon axe, & de la circonference d'un cercle qui a même diametre que cette ſphere. 86

La ſphere peut être conſiderée comme un ſpheroïde formé par un polygone régulier d'une infinité de côtez †, dont le diametre par conſéquent peut être pris pour l'axe de la ſphere. Ainſi ſa ſurface, par le Théorême précédent, eſt égale au rectangle fait de ſon axe par la circonference du cercle ou polygone, par la révolution duquel elle a été formée, dont le diametre par conſéquent eſt le même que celui de cette ſphere; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XI.

La ſurface d'une ſphere eſt égale à celle du contour d'un cylindre ou elle eſt inſcrite, qui par conſéquent à la même hauteur ou même axe. 87

La ſurface de la ſphere *AMNC* (*fig. ſuiv.*) eſt égale à un rectangle fait de ſon axe, & de la circonference du cercle qui a un même diametre *MN* ‡. Or la ſurface du cylindre où cette ſphere eſt inſcrite, dont les côtez *DP* & *IQ* ſont égaux à *AC* l'axe de cette ſphere, eſt égale à ce même rectangle; car elle eſt égale au rectangle fait de *PD* par la circonference du

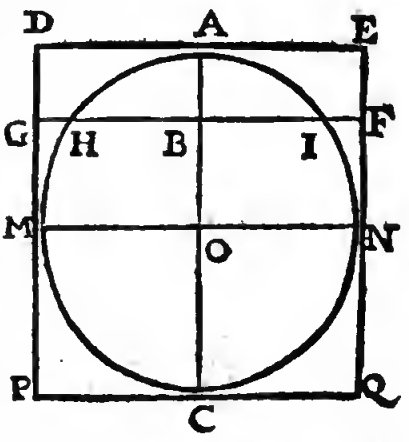
* *L.* 3. *n.* 17. † *ſup. n.* 66. ‡ *ſup. n.* 86.

cercle de ſa baſe qui a pour diametre *PQ* égal à *MN*; puiſque le diametre d'une ſphere inſcrite dans un cylindre doit être égal à celui de la baſe du cylindre, ſelon l'idée que l'on a donnée des figures inſcrites [a].

THEOREME XII.

88 *Si on coupe une ſphere inſcrite dans un cylindre par des plans perpendiculaires à ſon axe, la ſurface de chaque partie de la ſphere eſt égale à celle de la partie du cylindre qui lui répond.*

AC axe de la ſphere eſt la hauteur du cylindre où la ſphere eſt inſcrite, ainſi ce cylindre touche par ſes deux baſes cette ſphere. Je coupe l'axe *AC* par des plans perpendiculaires ſur lui, qui coupent auſſi le cylindre. Je dis que la ſurface de la partie *MHIN* eſt égale à celle de la partie *MGFN* du cylindre, comme auſſi la ſurface de *HAI* à celle de *EFGD*.



Car on peut prendre cette ſphere pour un ſpheroïde [b], ainſi la partie *MHIN* & *HAI* ſont des portions des ſpheroïdes. Ainſi la ſurface de *MHIN* eſt égale au rectangle *B*) par la circonference d'un cercle dont *MN* eſt le diametre [c], lequel rectangle eſt égal à la ſurface *FGMN* [d]; de même la ſurface de *HAI* eſt égale au rectangle de *AB* par la circonference d'un cercle dont *GF* eſt le diametre [e], auquel la ſurface de la partie *DEFG* eſt égale [f].

PRO-

a *ſup.* n. 46. b *ſup.* n. 66. c *ſup.* n. 84. d *ſup* n. 68. e *ſup.* n. 84. f *ſup* n. 68.

PROBLEME I.

Couper une ſphere par un plan, de ſorte que les ſurfaces des portions de cette ſection ſoient en raiſon donnée. Archimede II. Prop. 4. & 5. 89

Il faut inſcrire la ſphere dans un cylindre, enſuite couper les côtez du cylindre ſelon la raiſon donnée, & mener par les points de cette ſection des lignes ou des plans paralleles qui couperont la ſphere ſelon la raiſon donnée; car les ſurfaces des portions de la ſphere compriſes entre ces paralleles, ſeront égales à celles des portions du cylindre auxquelles elles répondront, comme on vient de le prouver.

THEOREME XIII.

La ſurface d'une ſphere eſt égale à quatre fois celle de ſon plus grand cercle. Archimede I. Prop. 37. 90

Concevons une ſphere dans un cylindre, dont la baſe par conſéquent ſera égale au plus grand cercle de la ſphere, & ſa hauteur ſera le diametre de ce plus grand cercle; par conſéquent le contour de ce cylindre ſera égal à quatre fois la ſurface de ce cercle *. Or la ſurface de la ſphere eſt égale à ce contour †: donc elle eſt égale à quatre fois ſon plus grand cercle.

THEOREME XIV.

La ſurface d'une ſphere eſt égale à celle d'un cercle, dont le rayon eſt égal au diametre de ſon plus grand cercle. 91

Soit *X* une ſphere & *Z* un cercle, dont le rayon eſt égal au diametre du plus grand cercle de la ſphere *X*. Il faut prouver que la ſurface de *X* eſt égale à celle de ce cercle *Z*.

* *ſup.* n. 72. † *ſup.* n. 87.

Ayant ſuppoſé que le diametre du plus grand cercle eſt 1 ; donc ſelon l'hypotheſe, le diametre de *Z* eſt 2. Or les ſurfaces des cercles étant entre elles comme les quarrez de leurs diametres *, puiſque le quarré de 1 eſt 1, & que celui de 2 eſt 4, ſelon l'hypotheſe, la ſurface de *Z* ſera quadruple de celle du cercle de la ſphere *X*. Or la ſurface de cette ſphere eſt quadruple de celle de ſon plus grand cercle par le Théorême précédent, donc elle ſera égale à celle de *Z* ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XV.

92 *La ſurface entiere d'un cylindre*, c'eſt-à-dire, *tant de ſon contour que de ſes deux baſes, eſt à celle d'une ſphere à laquelle il eſt circonſcrit, en raiſon ſeſquialtere.* Archimede I. Prop. 39.

1°. Le ſeul contour du cylindre eſt égal à la ſurface de la ſphere †.

2°. Chaque baſe de ce cylindre eſt le plus grand cercle de la ſphere, qui eſt la quatrieme partie de ſa ſurface ‡ ; ainſi les deux baſes du cylindre ſont la moitié de la ſurface de la ſphere.

Partant toute la ſurface du cylindre eſt égale, 1°. à une fois toute la ſurface de la ſphere : 2°. à la moitié de cette ſurface ; ainſi cette raiſon eſt ſeſquialtere, c'eſt-à-dire, comme 3 à 2.

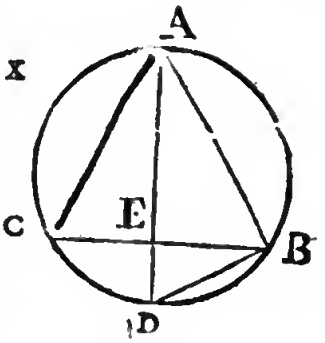
THEOREME XVI.

93 *Une ſphere étant coupée par un plan en deux portions, les ſurfaces de ces portions ſont entre elles comme celles des cercles qui ont pour rayons les cordes de la moitié de ces portions, & ſont égales à ces cercles.*

Soit *X* une ſphere coupée par le plan *BC* ; il faut prouver que les ſurfaces de ces deux portions

* *L.* 4. *n.* 93. † *Sup.* n. 87. ‡ *Sup.* n. 90.

tions ſont entre elles comme celles des ſurfaces des cercles, dont *AB* & *BD* cordes de la moitié de ces deux portions ſont les rayons, & qu'elles leur ſont égales.



1°. Ayant inſcrit la ſphere *X* dans un cylindre de même hauteur que cette ſphere, la ſurface de la portion *ABC* ſera égale au contour de la partie du cylindre qui lui répond, comme celle de *BCD* à l'autre partie du cylindre [a]. Les contours de ces deux parties ſont entre eux comme *AE* à *ED* [b]. Or les quarrez ſur *AB* & *BD* ſont auſſi comme *AE* à *ED* [c]: Donc les ſurfaces des portions de cette ſphere ſeront entre elles comme ces deux quarrez, ou les cercles dont ils ſont rayons [d].

2°. Le quarré de *AD* eſt égal aux quarrez de *AB* & de *BD* [e]; donc la ſurface du cercle dont *AD* eſt le rayon, eſt égale aux ſurfaces des deux cercles, dont *AB* & *BD* ſont les rayons [f].

Or le cercle dont *AD* eſt le rayon, a ſa ſurface égale à celle de la ſphere *X* [g]; ainſi cette ſurface eſt égale à celle des deux cercles dont *AB* & *BD* ſont les rayons. Mais il vient d'être dit qu'ils ſont auſſi entre eux comme ces portions; donc ils leur ſeront égaux chacun à celui qui lui répond, puiſque le même tout eſt diviſé en même proportion.

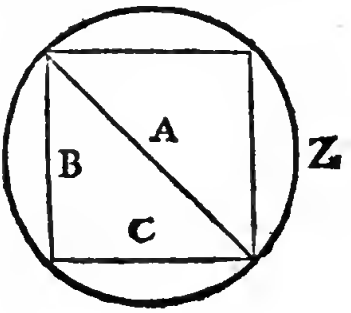
THEOREME XVII.

La ſurface d'une ſphere eſt double de celle du 94

a *ſup.* n. 88. b *ſup.* n. 69. c *L.* 4. n. 80. d *L.* 4. n. 93. e *L.* 4. n. 78. f *L.* 4. n. 93. g *ſup.* n. 91.

contour du cylindre qui lui eſt inſcrit, & dont la hauteur eſt égale au diametre de ſa baſe.

La ſurface de la ſphere *Z* eſt quadruple de celle du cercle, dont *A* eſt le diametre *.



La ſurface du cercle dont *A* eſt le diametre, eſt égale à la ſurface des cercles dont *C* & *B* ſont les diametres, puiſque ces ſurfaces ſont comme les quarrez de leurs diametres, & que $AA = CC + BB$ †. Or $C = B$: ainſi la ſurface du cercle dont *A* eſt le diametre, eſt égale à deux fois celle du cercle donc *C* eſt le diametre; & par conſéquent puiſque la ſurface de *A* eſt la quatrieme partie de la ſurface de la ſphere *Z*, celle du cercle dont *C* eſt le diametre eſt la huitieme partie de celle de la ſphere *Z*. Or la ſurface de ce même cercle, dont *C* eſt le diametre, eſt la quatrieme partie du contour de ce cylindre inſcrit ‡: donc ce contour eſt la moitié de la ſurface de la ſphere *Z*.

SECTION IV.

De la ſolidité des Solides.

Propoſitions évidentes touchant cette ſolidité.

PROPOSITION I.

95 *ON peut concevoir que tout Parallelipede eſt fait par le mouvement de ſon plan, ou de ſa baſe toujours parallelement à elle-même.*

PRO-

* *ſup. n.* 70. † *L.* 4 *n.* 78. ‡ *ſup. n.* 72.

PROPOSITION II.

Si le plan dont le mouvement forme le Parallelépipede, ſe fait ſelon la perpendiculaire de ſa hauteur, il eſt droit & ſes angles ſont droits. Si c'eſt ſelon une ligne oblique, il eſt oblique, & ſes angles ne ſont pas droits. 96

PROPOSITION III.

On peut auſſi concevoir qu'un Parallelépipede eſt compoſé d'une infinité de plans tous paralleles, & tous égaux à celui qui en eſt la baſe. 97

COROLLAIRE.

Il en eſt de même des cylindres, & des priſmes. 98

PROPOSITION IV.

Une pyramide peut être faite par le mouvement de ſa baſe, toujours parallelement à elle-même, & décroiſſant à proportion qu'elle monte. Si ce mouvement ſe fait ſelon la perpendiculaire de ſa hauteur, la pyramide eſt droite; ſi ſelon une oblique, elle eſt oblique. 99

PROPOSITION V.

On peut auſſi concevoir qu'une pyramide eſt compoſée d'une infinité de plans paralleles, qui diminuent à proportion qu'ils ſont élevez. 100

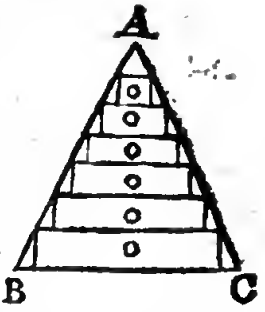
PROPOSITION VI.

Deux ſolides de même hauteur contiennent un égal nombre de plans, c'eſt-à-dire, qu'on en peut concevoir autant dans l'un que dans l'autre. 101

PROPOSITION VII.

Si on ſuppoſe qu'un parallelépipede oblique, ou priſme oblique, toute pyramide, tout cône, ſont compoſez d'une infinité de plans, leurs ſurfaces ſeront unies. 102

Con-



Conſiderez la pyramide *BAC*. Si les plans *O*, *O*, *O*, *O*, *O*, *O*, qui la compoſent ſont épais, il eſt évident que ſa ſurface ne ſera pas unie, mais par degrez d'autant plus grands, que les plans *O* ſeront plus épais; & ils le ſeront d'autant moins, qu'il y en aura plus. Si on ſuppoſoit donc qu'ils fuſſent infinis en nombre, ils n'auroient plus d'épaiſſeur; & alors la ſurface de *BAC* ſeroit ſans degrez. Ce qui ſe conçoit de tout parallelépipede, de tout priſme, de toute pyramide & de tout cône.

Proposition VIII.

103 *On peut concevoir un parallelépipede ſur une ligne donnée qui ſoit ſemblable, & poſé de la même maniere qu'un autre parallelépipede donné.* Eucl. XI. Prop. 27.

Euclide propoſe de faire la choſe; ce qui n'eſt pas difficile : mais il ſuffit qu'on la conçoive faite.

Proposition IX.

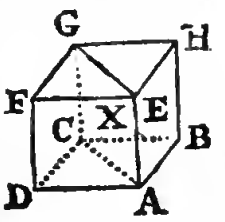
104 *Deux ſolides ſont égaux, qui ſont compoſez d'un égal nombre de plans également épais, ſemblables & égaux.*

Si par exemple deux ſolides *X* & *Z* étoient compoſez chacun d'un million de plans également épais & égaux, ils ſeroient évidemment égaux. J'ajoute *ſemblables*, pour marquer qu'en cas que les plans dont *X* eſt compoſé allaſſent en diminuant, ſi ceux de *Z* alloient de même en diminuant chacun étant ſemblable à celui auquel il répond, c'eſt-à-dire, le centieme de *X* étant égal

égal & ſemblable au centieme de *Z*, il faut que *X* & *Z* ſoient néceſſairement égaux.

PROPOSITION X.

Si on coupe le parallelépipede X *par un plan,* 103
ſelon la diagonale AC *ou* EG, *il ſera coupé en deux priſmes triangulaires égaux.* Eucl. XI. Prop. 28.



Les deux parties de *X* ont leurs baſes égales, elles ont même hauteur : donc par la Propoſition précédente, elles ſont égales. Selon la Définition des priſmes *, elles ſont priſmes triangulaires.

PROPOSITION XI.

Si les côtez des plans oppoſez d'un parallelépi- 106
pede ſont coupez en deux également, & qu'on mene des plans par les ſections ; la ligne de commune ſection & de ces plans, & le diametre du parallelépipede, ſe couperont en deux également. Eucl. XI. Prop. 39.

Cela eſt évident, car ce diametre eſt la baſe d'un triangle coupé parallelement à un de ces côtez par le milieu de l'autre ; ce qui diviſe également & le côté & la baſe.

PROPOSITION XII.

Si un ſolide eſt compris entre des plans paralle- 107
les, ceux de ces plans qui ſont oppoſez ſont des parallelogrammes ſemblables & égaux. Eucl. XI. Prop. 24. (*Même figure.*)

1°. Les lignes *AD* & *BC* ſeront paralleles †, comme auſſi *AB* & *DC*. Il en eſt de même des lignes *EF* & *HG*, & de *FG* & *EH*. Ainſi les plans *ABCD* & *EFGH* ſont des parallelogrammes. 2°. Ces parallelogrammes ſont ſemblables ; car l'angle *EFG* eſt égal à *ADC* ‡ : ainſi des

* *ſup.* n. 34. † *ſup.* n. 34. ‡ *ſup.* n. 36.

des autres. 3°. *AB* & *HE* paralleles entre les paralleles *AE* & *BH* ſont égales, obliques ou perpendiculaires quelles qu'elles ſoient* : ainſi on peut démontrer que ces plans oppoſez ſont égaux.

THEOREME I.

101 *Toute ſection d'un parallelépipede, d'un priſme, d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône, qui ſe fait parallelement à ſa baſe, eſt ſemblable à ſa baſe.* Eucl. XI. Prop. 25.

1°. Cela eſt évident dans le parallelépipede, le priſme, & le cylindre, qui ſe font par le mouvement toujours parallele de leurs baſes.

2°. Auſſi dans la pyramide, dans le cône, qui ſont des ſolides faits par le mouvement de leur baſe, qui diminue proportionnellement; ainſi tous les plans paralleles dont on peut concevoir que l'un & l'autre eſt fait, ſont tous ſemblables. Or ces ſections ſont quelqu'un de ces plans; par conſéquent elles ſont ſemblables à la baſe; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.

102 *Tous les ſolides de même nom, qui ont des baſes égales & ſont de même hauteur, ſont égaux, ſoit droits, ſoit obliques.* Eucl. XI. Prop. 29. 30. & 31.

C'eſt-à-dire, que les ſolides parallelépipedes étant ſur baſes égales, & de même hauteur, ſont égaux entre eux, ils ont un égal nombre de plans tous ſemblables & égaux à leurs baſes†; ainſi ils doivent être égaux.

Il en eſt de même des priſmes, des cylindres, des pyramides, des cônes; car chaque plan de l'une eſt ſemblable & égal à chacun de l'autre pris à la même hauteur.

Co-

* *L.* 2. *n.* 110. † *ſup. n.* 101.

COROLLAIRE.

Donc pour meſurer les ſolides, il faut ſeulement avoir égard à leur hauteur, & à leur baſe. 110

Car un parallelépipede oblique a bien plus de ſurface qu'un droit. Cependant s'il eſt ſur une baſe égale, & de même hauteur, il n'eſt pas plus grand.

THEOREME III.

Les ſolides parallelépipedes & les priſmes de même hauteur, ſont l'un à l'autre comme leurs baſes; & s'ils ont même baſe, ils ſont comme leurs hauteurs. Eucl. XI. Prop. 32. 111

Soient les deux ſolides *Z* & *X*. 1°. Ils ont un égal nombre de plans paralleles *, & ſemblables à leurs baſes. Si leurs baſes ſont égales, ils ſont donc égaux; ſi celle de *Z* eſt double de celle de *X*, alors tous les plans de *Z* étant doubles de ceux de *X*, il faut que *Z* ſoit double de *X*. 2°. Si ces deux ſolides ont leurs baſes égales, ils ſeront comme leurs hauteurs; car tous leurs plans étant égaux, ſi le ſolide *Z* eſt deux fois plus haut que *X*, il doit avoir deux fois plus de ces plans. S'il eſt trois fois plus haut, il en aura trois fois plus.

THEOREME IV.

Deux cylindres de même hauteur ſont comme leurs baſes; ou s'ils ont une même baſe, ils ſont comme leurs hauteurs. Eucl. XII. Prop. 11. & 14. 112

Cela vient d'être démontré du priſme, & par conſéquent du cylindre.

THEOREME V.

Si un cylindre eſt coupé par un plan parallele aux plans oppoſez de ſes baſes, les ſegmens du cylin- 113

* *ſup. n.* 101.

cylindre ſeront l'un à l'autre comme les ſegmens de l'axe. Eucl. XII. Prop. 13.

Les plans de ces ſections ſeront égaux [a]. Tous les ſegmens ſeront donc comme autant de cylindres qui ont leurs baſes égales, & partant il ſont entre eux comme des ſegmens de l'axe, qui ſont leur hauteur par le précédent Théorême.

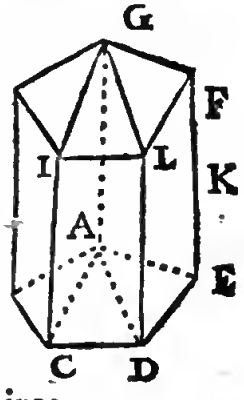
THEOREME VI.

114 *Un parallelépipede eſt double d'un priſme triangulaire de même hauteur, ſi la baſe du parallelépipede eſt double du triangulaire.* Eucl. XI. Prop. 40.

Cela eſt évident, puiſque ces deux priſmes ſont comme leurs baſes [b].

THEOREME VII.

115 *Tout priſme polygone peut être diviſé en priſmes triangulaires.*



Soit *K* un priſme polygone dont les baſes ſont *ABCDE* & *GHILF*: ces baſes polygones ſe réduiſent en triangles. Par la Définition des priſmes triangulaires, les ſolides *ABCGHI*, *ACDGIL*, *ADEGLE* ſont des priſmes triangulaires: donc le priſme *K* peut être diviſé en priſmes triangulaires.

THEOREME VIII.

116 *Un priſme eſt égal à pluſieurs priſmes de même hauteur, ſi ſa baſe eſt égale à celles de tous ces priſmes. Il en eſt de même des pyramides.*

Car concevant dans ces ſolides des plans paralleles à la baſe [c], il y aura un égal nombre de plans dans chacun [d]; chaque plan dans le grand priſ-

a *ſup* n. 98. b *ſup.* n. 111. c *ſup.* n. 97. d *ſup.* n. 101.

prisme sera égal à tous les plans qui seront dans les autres prismes ; car il leur sera comme sa base est à toutes les bases de ces prismes. Or elle leur est égale : donc, &c. Il en est de même des pyramides.

Corollaire I.

Un cylindre est égal à un prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à la sienne. 117

Un cylindre est un prisme polygone. Tout prisme polygone peut être divisé en prismes triangulaires *. Ces prismes seront égaux à un seul prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à toutes celles de ces prismes †. Partant le cylindre égal à ce prisme polygone, l'est à ce prisme triangulaire qui a même hauteur, & dont la base est égale à la sienne.

Corollaire II.

Donc un cylindre X *est égal à plusieurs cylindres* A, B, C, &c. *de même hauteur, dont toutes les bases prises ensemble sont égales à la sienne.* 118

Car tous ces cylindres seront égaux à autant de prismes triangulaires, qui ont même hauteur & bases égales. Celui auquel *X* est égal, & partant de même hauteur & sur base égale, est égal à tous ces autres prismes triangulaires, & partant aux cylindres *A*, *B*, *C*, *&c.* dont toutes les bases sont égales à celle de *X*; partant *X* est égal à *A*, *B*, *C*, *&c.*

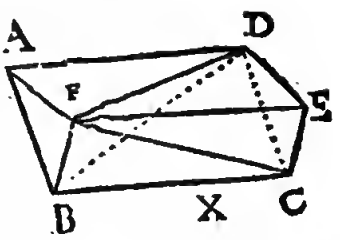
Theoreme IX.

Un prisme triangulaire se divise en trois pyramides triangulaires égales. Euclide XII. Prop. 7. 119

Soit

* *sup.* n. 115. † *sup.* n. 116.

Soit *X* un priſme triangulaire; je mene ſur chacune de ſes trois faces des diagonales, qui feront ſix triangles. Les triangles *BAD*, *BCD* ſont égaux [a], les pyramides *BADF* & *BDCF* qui ont même ſommet, & partant même hauteur, ſont égales [b]. Ayant ôté, par la penſée, de ce priſme *X*, ces deux pyramides, il en reſte une troiſieme ſavoir *FCED*, laquelle a premierement même ſommet *D*, & partant même hauteur que la pyramide *FBCD*; elles ont des baſes égales, ſavoir les triangles égaux *FBC* & *FCE* [c]; donc elles ſont égales [d]. Or la pyramide *FBCD* eſt la même que *BDCF*, étant formée par les mêmes triangles: donc les pyramides *FCED* & *BADF* ſeront égales, l'étant à une troiſieme; ainſi le priſme *X* peut être diviſé en trois pyramides égales, qui ſont *BADF*, *BDCF* & *CEDF*.



Corollaire I.

120 *Donc toute pyramide eſt le tiers de tout priſme de même hauteur, qui eſt ſur même baſe, ou ſur baſe égale.*

Corollaire II.

121 *Donc pour meſurer une pyramide, il faut multiplier la baſe par le tiers de ſa hauteur.*

Lemme.

122 *Une pyramide polygone ſe peut diviſer en pyramides triangulaires.*

La baſe d'une pyramide polygone eſt un polygone, qui par conſéquent ſe réduit en triangles,

a *L.2.n.128.* b *ſup. n. 109.* c *L.2.n.128.* d *ſup. n. 109.*

gles, sur lesquels concevant des plans élevez le long des côtez de cette pyramide jusqu'à son sommet, on aura plusieurs pyramides triangulaires, qui seront les parties de la pyramide polygone.

THEOREME X.

Les pyramides qui ont pour base des triangles, & qui sont de même hauteur, sont entre elles comme leurs bases. Il en est de même de celles qui ont des polygones pour leurs bases. Eucl. XII. Prop. 5. & 6. 123

Les prismes sont triples des pyramides de même base & de même hauteur *. Mais les prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, ou ceux de même base sont comme leurs hauteurs †: donc aussi les pyramides, qui ne sont que le tiers. Par le Lemme précédent, on peut confondre les pyramides polygones avec les triangulaires, puisqu'elles s'y résolvent.

THEOREME XI.

Toute pyramide ayant une base triangulaire peut être divisée en deux pyramides égales, semblables entre elles, & à la totale, & en deux prismes égaux & plus grands que la moitié de la pyramide totale. Eucl. XII. Prop. 3. 124

THEOREME XII.

Deux pyramides de même hauteur ayant des bases triangulaires, soient divisées en deux autres pyramides égales entre elles & semblables à la toute & en deux prismes égaux; & que les pyramides provenues de cette division soient toujours divisées de la même façon: comme la base de l'une des pyramides sera à la base de l'autre; ainsi tous les prismes qui sont en l'une des pyra- 125

mi-

* *sup.* n. 120. † *sup.* n. 111.

mides, ſeront à tous les priſmes de l'autre égaux en nombre. Eucl. XII. Prop. 4.

Ces deux Propoſitions n'ont rien de fort utile, ainſi je n'en rapporte point les démonſtrations.

THEOREME XIII.

126 *Toute pyramide polygone eſt le tiers de tout priſme de même hauteur, & qui eſt ſur même baſe ou ſur baſe égale.*

Car ayant réduit en triangles l'une & l'autre baſe de ces deux ſolides, la pyramide polygone ſera diviſée en pyramides triangulaires. Or chacune de ces pyramides triangulaires, ſera le tiers de chacun de ces priſmes triangulaires *: ainſi toute la pyramide polygone ſera le tiers de tout le priſme polygone.

AVERTISSEMENT.

127 *On donne cette règle pour trouver la ſolidité de un fragment de pyramide dont les baſes ſont paralleles; ſoit par exemple l'inferieure* 36, *la ſuperieure* 9, *ce nombre* 18 *eſt moyen entre ces deux nombres.*

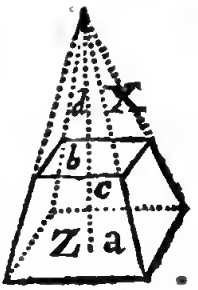
Z

Il les faut ajouter dans une ſomme, & multiplier cette ſomme par 2 que je ſuppoſe le tiers de la hauteur du fragment, le produit 126 ſera la ſolidité de ce fragment. Examinons cette règle.

Soit a *la baſe inferieure*, b *la ſuperieure*, c *la hauteur de* Z *fragment*, d *le reſte de l'axe pour achever la pyramide*, aac + aad *eſt la ſolidité d'un priſme qui eſt le triple de toute la pyramide, dont j'ôte* bbd *la ſolidité d'un priſme, dont la pyramide* X *eſt le tiers: Ainſi* aac + aad − bbd = 3Z. *Puiſque* ÷ aa. ab. bb;

* *Sup.* n. 120.

bb; *Donc, ſelon la règle, en multipliant ces trois termes qui ſont les mêmes que* 36, 18, 9, *par le tiers de* c, *j'aurai la ſolidité de* Z; *ainſi multipliant par tout* c, *j'aurai* aac + abc + bbc = 3 Z: *reſte à démontrer que* aac + aad − bbd = aac + abc + bbc: *j'ôte* aac *de part & d'autre, reſte* aad − bbd = abc + bbc. *Il faut voir ſi cela eſt.*



a − b. b :: c. d, *multipliant* a − b *&* b *par* a + b [a], aa − bb. ab + bb :: a − b. b. *Ainſi* aa − bb. ab + bb :: c. d [b]: *Donc multipliant les extrêmes & les moyens, on a* aad − bbd = abc + bbc [c]; *ce qui reſtoit à prouver. La règle eſt donc ſure.*

Theoreme XIV.

Un cône eſt le tiers d'un cylindre de même hauteur ſur baſes égales. Eucl. XII. Prop. 10. 121

Un cône eſt une pyramide d'une infinité de côtez: or une pyramide eſt le tiers d'un priſme de même hauteur, qui a une baſe égale [d]: donc le cône eſt auſſi le tiers d'un cylindre de même hauteur, & ſur même baſe ou baſe égale, puiſqu'un cylindre eſt un priſme d'un nombre infini de côtez.

Corollaire I.

Un cône eſt égal à tous les cônes de même hauteur, dont les baſes priſes enſemble ſont égales à la ſienne. 122

Ces cônes ſont des pyramides d'un nombre infini de côtez, leſquels font le tiers du cylindre ou du priſme; ainſi cette Propoſition n'eſt pas differente de celle qu'on a propoſée [e].

a *L.* 3. *n.* 54. b *L.* 3. *n.* 53. c *L.* 3. *n.* 56.
d *ſup. n.* 120. e *ſup. n.* 116.

COROLLAIRE II.

130 *Deux cônes de même hauteur ſont comme leurs baſes; & s'ils ont même baſe, ils ſont comme leurs hauteurs.* Eucl. XII. Prop. 11. & 14.

Cela eſt évident.

THEOREME XV.

131 *Les priſmes & les parallelépipedes ſemblables ſont en raiſon compoſées des raiſons de leurs trois dimenſions, & cette raiſon eſt triplée.* Eucl. XI. Prop. 33.

Leur ſolidité dépend de la multiplication de leurs dimenſions [a]. La raiſon qu'ils ont entre eux eſt compoſée de celle de leurs trois dimenſions [b]. Etant ſemblables, cette raiſon eſt triplée [c].

THEOREME XVI.

132 *Les cylindres ſemblables ſont entre eux en raiſon compoſée de leurs dimenſions, & cette raiſon eſt triplée.* Eucl. XII. Prop. 12.

Car ces cylindres étant comme des priſmes dont les baſes ſont d'un nombre infini de côtez, ils ſeront entre eux comme ces priſmes, par le précédent Théorême.

THEOREME XVII.

133 *Les pyramides ſemblables ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs trois dimenſions, & cette raiſon eſt triplée.* Eucl. XII. Prop. 8.

Cela eſt évident, car elles ſont le tiers des priſmes qui ſont ſur leurs baſes, & qui ont même hauteur [d]; & ainſi en même raiſon.

THEOREME XVIII.

134 *Les cônes ſemblables ſont entre eux en raiſon com-*

a *ſup.* n. 110. b *L.* 3. n. 78. c *L.* 3. n. 74. d *ſup.* n. 120.

composée des raisons de leurs dimensions, & cette raison est triplée. Eucl. XII. Prop. 12.

C'est une suite; car les cônes sont des pyramides sur des bases d'un nombre infini de côtez.

THEOREME XIX.

Les cylindres semblables sont entre eux comme 135
les cubes des diametres de leurs bases.

Ils sont en raison triplée de chacune de celles de leurs trois dimensions, & par conséquent de la raison des diametres de leurs bases. Or les cubes de leurs diametres sont en raison triplée de celle de ces mêmes diametres [a]. Donc puisque les raisons composées d'égales raisons sont égales, les cylindres semblables sont entre eux comme les cubes des diametres de leurs bases. Il en est de même des cônes semblables, & cela se démontre de la même maniere.

THEOREME XX.

Les parallelépipedes égaux ont leurs bases & leurs 136
hauteurs réciproques; & si elles sont réciproques, ces deux solides sont égaux. Eucl. XI. Prop. 34.

Soient X & Z deux parallelépipedes égaux, A la hauteur de X, & B celle de Z, M la valeur de la base de X, & N la valeur de la base de Z. Selon qu'on le suppose, $A \times M = B \times N$: Donc $A.B :: N.M$ [b]; partant ces quatre grandeurs A, M, B, N sont réciproques [c]. Or si ces quatre grandeurs sont réciproques, c'est-à-dire, si A, M, B, N peuvent être rangez de sorte que $A.B :: N.M$, il faut que $A \times M = B \times N$ [d].

THEOREME XXI.

Deux cylindres étant égaux, il en est de mê- 137
me des pyramides & cônes, *leurs hauteurs & leurs bases sont réciproques*; *& si elles sont réci-*

a *L.* 3. *n.* 82. b *L.* 3. *n.* 58. c *L.* 3. *n.* 61. d *L.* 3. *n.* 56.

proques, ces deux cylindres ſont égaux. Eucl. XII. Prop. 9. & 15.

La démonſtration du Théorême précédent ſert à celui-ci; il n'y a qu'à entendre par *X* & par *Z* deux cylindres.

THEOREME XXII.

238 *Si* A, B, C, *trois lignes droites, ſont proportionnelles, le ſolide parallelépipede* ABC *fait de ces trois lignes, eſt égal au parallelépipde* BBB *fait de la moyenne* B, *pourvu que ces ſolides ſoient équiangles.* Eucl. XI. Prop. 36.

∴ *A. B. C.* Donc *AC* = *BB* *. Donc multipliant *AC* & *BB* par *B*, le produit *ACB* ſera encore égal au produit *BBB* †. Or *ACB* eſt le parallelépipede fait des trois lignes *A*, *B*, *C*, égal ainſi à *BBB* fait de la moyenne *B*.

THEOREME XXIII.

239 A, B, C, D, *ſont quatre lignes proportionnelles. Les ſolides ſemblables faits ſur ces lignes ſont en proportion; & s'ils ſont en proportion, ces quatre lignes ſont proportionnelles.* Eucl. XI. Prop. 37.

Cela a été prouvé ‡.

THEOREME XXIV.

240 *Une ſphere eſt égale à un cône, ou pyramide polygone, qui a pour axe le rayon de cette ſphere, & pour baſe un cercle, dont le rayon eſt le diametre de cette même ſphere.*

1°. En concevant une infinité de cônes ou de pyramides polygones, dont le ſommet eſt dans le centre d'une ſphere, & les baſes dans la ſurface de la même ſphere; il eſt évident qu'on peut dire, que la ſolidité de cette ſphere eſt égale à tous ces cônes ou pyramides polygones, puiſ-

* *L.* 3. *n.* 37. † *L.* 3. *n.* 54. ‡ *L.* 3. *n.* 85.

puiſque c'eſt dire que le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

2°. Tous ces cônes ſont égaux à un cône qui a même hauteur, à ſavoir le rayon de cette ſphere, & pour baſe toute la ſurface de cette ſphere, qui eſt égale aux baſes de ces cônes *.

3°. Or la ſurface de cette ſphere eſt égale à celle d'un cercle, qui a pour rayon le diametre de cette ſphere †: donc la ſolidité eſt égale à celle d'un cône dont la baſe, &c.

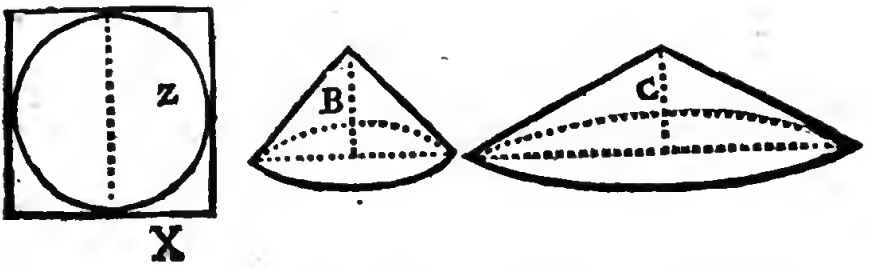
Suppoſé la raiſon du diametre à la circonference du cercle comme 7 *à* 22, *on peut dire que la ſolidité de la ſphere eſt au cube de ſon diametre comme* 11 *à* 21 : *car ſoit* m *la circonference du cercle*, & n *le diametre*. 1°. mnn. nnn :: m. n ‡. *Or* m *eſt à* n *comme* 22 *à* 7, *ou* 66 *à* 21. *Ainſi la ſixieme partie de* mnn, *qui eſt la ſolidité de la ſphere, ſuivant ce qui ſe conclud facilement de ce qui a été précédemment démontré, eſt à* nnn *cube de ſon diametre, comme la ſixieme partie de* 66, *c'eſt-à-dire*, 11 *eſt à* 21 ; *ce qu'il falloit prouver.* 141

THEOREME XXV.

La raiſon de X *cylindre à la ſphere* Z *qui lui eſt inſcrite, eſt ſeſquialtere.* 142

Soient *B* & *C* deux cônes qui ayent pour axe le rayon de la ſphere *Z*, & que le rayon de la baſe de *B* ſoit celui de la ſphere *Z*, & le rayon de la baſe de *C* ſoit l'axe ou le diametre de la même ſphere *X*, alors ces deux cônes *B* & *C* ſeront comme leurs baſes ‡. Or celle de *C* eſt quadruple de celle de *B* : donc le cône *C* eſt quadruple du cône *B*; ainſi *B*. *C* : : 1. 4. le plus petit cône *B* eſt la ſixieme partie du cylin-

* *ſup. n.* 129. † *ſup. n.* 91. ‡ *L.* 3. *n.* 54. ‡ *ſup. n.* 130.



dre *X*, qui a pour baſe le grand cercle de la ſphere *Z*, & pour axe le diametre; car ce cône *B* eſt le tiers d'un cylindre, qui a même baſe que lui & même axe *; par conſéquent il eſt la ſixieme partie d'un cylindre qui a même baſe, & un axe deux fois plus grand; ainſi *X. B* :: 6. 1. Le cône *C* eſt égal à la ſphere *Z* †, on a prouvé que *B. C* :: 1. 4; ainſi *B. Z* :: 1. 4: donc puiſque le cylindre *X* vaut ſix parties, telles que la ſphere *Z* en vaut quatre, *X. Z* :: 6. 4; ce qui eſt une raiſon ſeſquialtere.

THEOREME XXVI.

143 *Les ſpheres ſont entre elles comme les cubes de leurs diametres, ou en raiſon triplée de celle de leurs diametres.* Eucl. XII. Prop. 18.

Les ſpheres ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs trois dimenſions; toutes les ſpheres ſont ſemblables; ainſi leurs trois dimenſions ont même raiſon: Donc la raiſon qu'elles compoſent eſt triplée de chacune des raiſons de leurs dimenſions; par exemple, de celle de leurs diametres. Or les cubes de ces diametres ſont en raiſon triplée de celle de ces diametres: donc les ſpheres ſont entre elles comme les cubes de leurs diametres.

SEC-

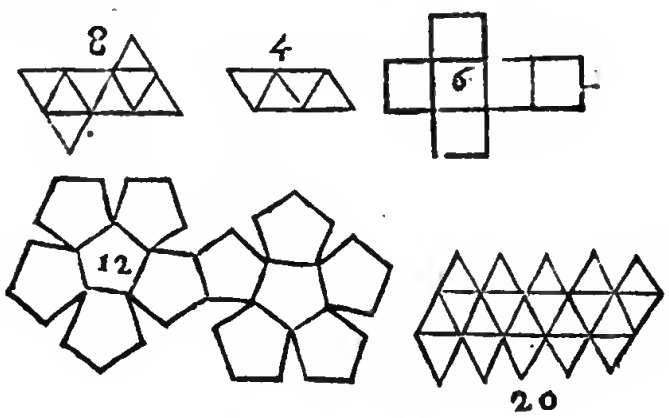
* *ſup. n.* 128. † *ſup. n.* 140.

SECTION V.

De la maniere d'inſcrire ou circonſcrire à une Sphere les cinq Corps réguliers.

AVERTISSEMENT.

IL faut faire avec du carton les cinq corps ré- 144
guliers, la ſeule vue de la figure ſuivante en apprend le moyen. Après avoir tracé ces figures & coupé le carton, on le plie de maniere que les plans qui compoſent ces corps réguliers ſe joignent enſemble.

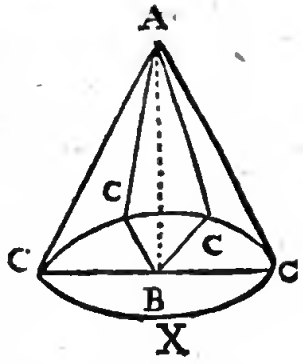


THEOREME I.

Toute ſection d'une ſphere par un plan, eſt un 145
cercle.

X eſt la ſection d'une ſphere dont *A* eſt le centre; il faut prouver que cette ſection eſt un cercle: pour cela concevons 1°. que du centre *A* de la ſphere on fait tomber ſur le plan de cette ſection, que je nomme *X*, une perpen-

diculaire *AB*. 2°. Que l'on tire du même centre *A* des lignes telles que *AC*, à tous les points des extrémitez de *X*: toutes ces lignes qui ſont rayons de la ſphere, ſont égales. Elles ſont obliques, puiſqu'on ne peut mener de *A* plus d'une perpendiculaire ſur *X*. Or les obliques égales ont leur pié également éloigné de la perpendiculaire *. Donc toutes ces lignes menées des extrémitez de *X* au point *B* ſont égales, & par conſéquent ces extrémitez ſont dans la circonference d'un cercle; ainſi *X* eſt un cercle, ſuivant ſa définition †.



Probleme I.

146. *Deux cercles inégaux étant concentriques, inſcrire au plus grand un polygone régulier ayant un nombre pair de côtez, de ſorte que ce polygone ne touche point le plus petit.* Euclid. XII. Prop. 16.

Probleme II.

147 *Deux ſpheres inégales ayant un même centre, inſcrire en la plus grande un* polyedre, *duquel les plans ne touchent point la ſurface de la petite ſphere.* Eucl. XII. Prop. 17.

Ces deux Problêmes ne me paroiſſent point néceſſaires, ainſi je les paſſe.

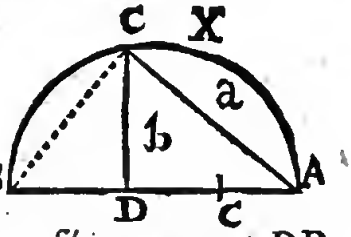
Lemme Premier.

148 *Si* aa *quarré de* AC *eſt triple de* bb *quarré de* CD *moyen proportionnel entre* AD & BD, *je dis que* DB *eſt la troiſieme partie du diametre* AB.

Soit,

* *L.* 1. *n.* 61. † *L.* 1. *n.* 20.

Soit AD nommé c. 1°. $aa = bb + cc$ [a], & puiſque par la ſuppoſition $3bb = aa$: donc $3bb = bb + cc$: ôtant de part & d'autre bb, on aura $2bb = cc$.

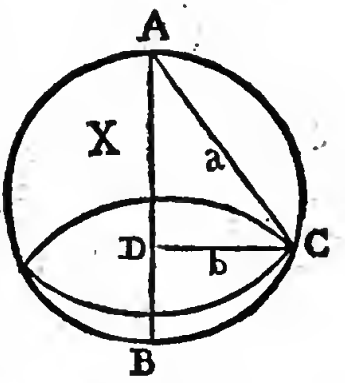


2°. $\div\div AD.CD.BD$, ou $\div\div c.b.BD$ par l'hypotheſe: donc cc ou $2bb.bb::AD.DB$ [b]. Donc AD ſera double de BD, & conſéquemment DB eſt un tiers de AB; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.

Le quarré d'un des côtez du tetraëdre *ou pyramide équilaterale, eſt égal à ſix fois le quarré de la troiſieme partie du diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.* 149

Le *tetraëdre* ou pyramide équilaterale, eſt fait de quatre triangles égaux & équilateraux. Concevons que dans la ſphere X il y a un *tetraëdre* inſcrit, dont AC ou a eſt un des côtez, & que CD eſt le rayon du cercle dans lequel eſt inſcrit un des triangles équilateraux qui compoſent ce ſolide: $\overline{AC}^2 = 3\overline{CD}^2$, ou $aa = 3bb$ [c]; par conſéquent DB eſt la troiſieme partie de AB diametre de la ſphere X, par le Lemme précédent. Soit donc $BD = c$, & par conſéquent $AB = 3c$. Puiſque $\div\div 3c.a.2c$ [d]: donc $6cc = aa$ [e]; ce qu'il falloit démontrer.



a *L.* 4. *n.* 78. b *L.* 3. *n.* 86. c *L.* 4. *n.* 146.
d *L.* 4. *n.* 28. e *L.* 3. *n.* 87.

COROLLAIRE.

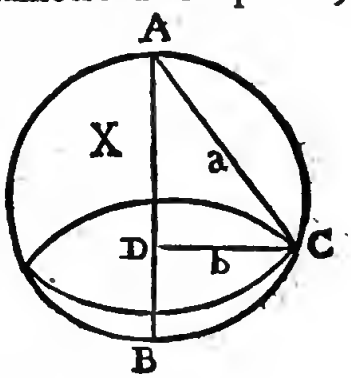
150 *Le quarré du diametre de la ſphere, eſt en raiſon ſeſquialtere avec le quarré d'un des côtez du* tetraëdre *qui lui eſt inſcrit.* Eucl. XIII. Prop. 13.

On vient de prouver que *aa*, quarré du côté du *tetraëdre*, eſt égal à ſix fois le quarré de *c* troiſieme partie du diametre de la ſphere. Or le quarré de 3 *c* diametre de la ſphere eſt 9 *cc*; ainſi la raiſon du quarré du côté du *tetraëdre* à celui du diametre de la ſphere ſera comme 6 *cc* à 9 *cc*, ou 6 à 9, qui eſt une raiſon ſeſquialtere.

THEOREME III.

151 *Le côté du* tetraëdre *eſt incommenſurable en lui-même, & commenſurable en puiſſance, avec le diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.*

Soit comme ci-deſſus *AC*, ou *a* côté du *tetraëdre*, & *AB* ou 3 *c* diametre de la ſphere, dont *DB* par ce qui a été démontré dans le Théorême précédent, eſt égal à *c*, & *AD* = 2 *c*; ainſi ∴ 3 *c*. *a*. 2 *c* *: donc 9 *cc*. *aa*: : 3 *c*. 2 *c* †. Or ces nombres 3 & 2 ne ſont pas nombres quarrez; donc *a* ſera incommenſurable en lui-même avec 3 *c*, & commenſurable en puiſſance ‡. Nous venons de voir dans le Théorême précédent, que *aa* eſt au quarré du diametre de la ſphere comme 6 à 9.



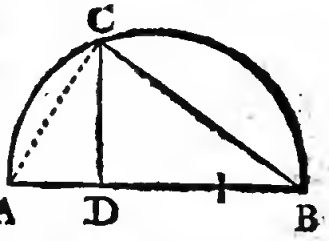
PROBLEME III.

152 *Inſcrire un* tetraëdre *dans une ſphere, ou trouver un cercle capable d'une des faces du* tetraëdre. Eucl. XIII. Prop. 13.

Il

* L. 4. n. 28. † L. 3. n. 36. ‡ L. 4. n. 115.

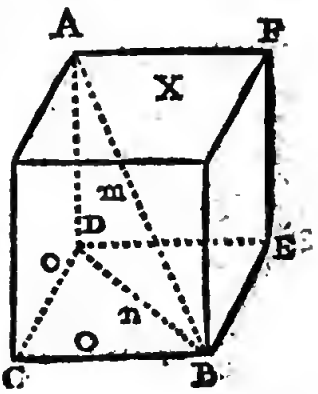
Il faut couper *AB* diametre de la ſphere en trois parties égales, de ſorte que *DB* ſoit double de *AD*, & ſur *D* élever la perpendiculaire *DC*, laquelle ſera le rayon d'un cercle, dans lequel ayant fait un triangle équilateral dont *BC* eſt le côté, vous aurez une des faces du *tetraëdre*, comme il eſt évident *.



THEOREME IV.

*Le quarré du diametre de la ſphere eſt triple du quarré de chaque côté du cube, ou de l'*hexaëdre *qui lui eſt inſcrit.* Eucl. XIII. Prop. 15. 153

Le cube ou l'*hexaëdre X* eſt inſcrit dans une ſphere. Soit la diagonale $AB = m$, qui eſt le diametre de la ſphere, la diagonale d'une des faces du cube ſoit *BD*. Je nomme *o* tous les côtez de ce cube, qui ſont tous égaux. $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$, ou $mm = nn + oo$ †. De même $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$, ou $nn = 2oo$. Subſtituant donc en place de *nn* ſa valeur $2oo$, on aura $mm = 3oo$, qui eſt ce qu'il falloit démontrer.



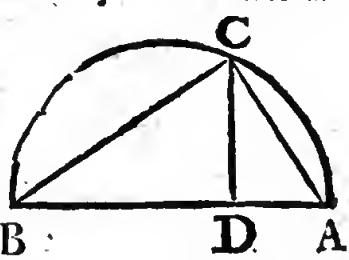
PROBLEME IV.

*Le diametre de la ſphere étant donné, trouver le côté du cube ou de l'*hexaëdre *qui peut y être inſcrit, ou trouver un cercle capable d'une des faces du cube.* Eucl. XIII. Prop. 15. 154

Soit *AB* le diametre de la ſphere où il faut inſcrire un cube, je le diviſe en trois parties. de ſor-

* *Sup.* n. 149. † *L.* 4. n. 78.

ſorte que BD eſt double de AD: ſur D j'élève la perpendiculaire CD, & de C je mene une ligne à A, qui ſera le côté du cube que je cherche. Car ſoit $BA = 3c$ & $CA = d$: donc $\div 3c.\ d.\ c$ *. Donc $3cc = dd$ †. Le quarré de AB ou de $3c$ eſt $9cc$; donc le quarré de AB eſt triple de celui de d, qui ne vaut que $3cc$. Partant AC eſt le côté du cube qu'on cherchoit, par le Théorême précédent.



Enſuite ſi on veut avoir le cercle capable d'une face du cube, il faut faire un quarré dont AC ſoit un des côtez, & lui circonſcrire un cercle qui ſera celui qu'on demande.

THEOREME V.

255 *Le côté du cube eſt incommenſurable en lui-même, & commenſurable en puiſſance, avec le diametre de la ſphere.* (Même figure.)

AC ou d, côté du cube, eſt moyen proportionnel entre tout le diametre AB ou $3c$, & ſa troiſieme partie c; ainſi puiſque $\div 3c.\ d.\ c$; donc $3c.\ c :: 3.\ 1$. Ces deux nombres 3 & 1 ne ſont pas deux nombres quarrez, partant AC eſt incommenſurable avec AB en lui-même; mais commenſurable en puiſſance, puiſque ſon quarré eſt le tiers de AB ‡.

THEOREME VI.

256 *Le quarré de chaque côté d'un* octaëdre *eſt la moitié de celui du diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.* Euclid. XIII. Prop. 14.

Un *octaëdre* eſt compoſé de huit triangles équilateraux tous égaux, dont les côtez ſont cordes du quart du cercle ou de nonante degrez.

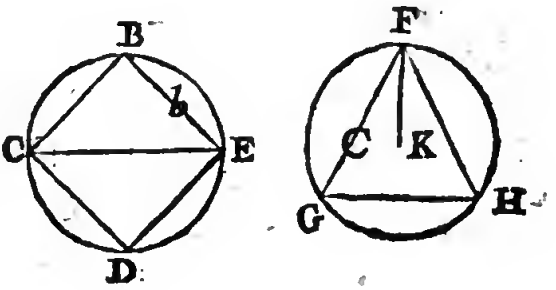
On

* *L. 4. n. 28.* † *L. 3. n. 57.* ‡ *L. 4. n. 131.*

Or il eſt évident que le quarré de la corde de nonante degrez eſt la moitié de celui du diametre : car deux cordes de nonante degrez font un angle droit, dont la baſe eſt le diametre du cercle ; ainſi le quarré de ces deux cordes eſt égal à celui du diametre, qui eſt par conſéquent le double de celui de chacune de ces deux cordes.

THEOREME VII.

*Le même cercle comprend le quarré qui eſt une des faces du cube, & le triangle qui eſt une des faces de l'*octaëdre, *l'un & l'autre inſcrit dans la même ſphere.* Eucl. XIV. Prop. 8. 157



Soit *BCDE* un quarré face d'un cube, inſcrit dans un cercle. *FGH* eſt un triangle face d'un *octaëdre* inſcrit dans un cercle. Il faut démontrer que ſi ces deux ſolides ſont inſcrits dans une même ſphere, ces deux cercles ſont égaux.

Soit *a* le diametre de la ſphere, *b* le côté du quarré qui eſt une des faces du cube, & *c* le côté du triangle qui eſt une des faces de l'*octaëdre*. Soit nommé *y* le rayon du cercle capable du quarré du cube, & *x* celui du cercle qui eſt capable du triangle de l'*octaëdre*. Il faut prouver que $y = x$.

1°. Si on conçoit *bb* le quarré du cube inſcrit dans un cercle dont *y* eſt le rayon, il eſt évident

que $2yy = bb$ [a]. Et puiſque $3bb = aa$ [b]: donc $aa = 6yy$. 2°. $3xx = cc$ [c]. Or $2cc = aa$ [d]: donc $6xx = aa$. Ainſi puiſque $6yy = aa = 6xx$, donc $6yy = 6xx$; donc $y = x$: ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VIII.

158 *Le côté d'un* octaëdre *eſt incommenſurable en lui-même, & commenſurable en puiſſance avec le diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.*

Le quarré de chaque côté de l'*octaëdre* eſt à celui du diametre de la ſphere, comme 1 à 2 [e]. Or 1 & 2 ne ſont pas des nombres quarrez; donc ce côté eſt incommenſurable en lui même, avec le diametre de la ſphere [f], & commenſurable en puiſſance, puiſque ſon quarré eſt moitié de celui de la ſphere.

PROBLEME V.

159 *Trouver le côté d'un* octaëdre, *& un cercle capable d'une des faces de ce ſolide.*

Trouvez par le Problême quatrieme un cercle capable d'un des côtez du cube. Par le Théorême ſeptieme, ce cercle eſt capable d'une des faces de l'*octaëdre*. Il ne s'agit donc que de faire un triangle équilateral dans ce cercle. Le côté de ce triangle ſera celui qu'on cherche.

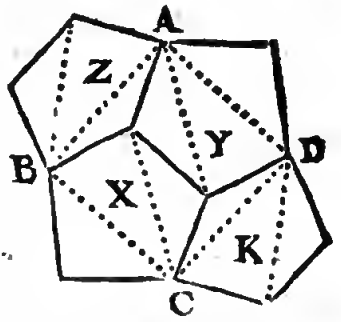
THEOREME IX.

160 *Ayant mené des diagonales ou cordes ſur les douze pentagones qui ſont le* dodecaëdre, *celles de ces diagonales qui ſe joindront formeront ſix quarrez qui ſont les ſix faces d'un* hexaëdre *ou cube inſcrit dans la même ſphere que le* dodecaëdre.

Soient

a *L.* 4. *n.* 78. b *ſup. n.* 153. c *L.* 4. *n.* 146.
d *ſup. n.* 156. e *ſup. n.* 156. f *L.* 4. *n.* 115.

Soient *KXZY* quatre pentagones faces d'un *dodecaëdre* (*ayez à la main en liſant ceci un* dodecaëdre): concevez ſur chacune de ces faces des diagonales, une de *A* à *B*, de *B* à *C*, de *C* à *D*, & de *D* à *A*, ainſi ſur toutes les autres faces; il faut prouver 1°. que ces quatre diagonales font un quarré, ſavoir *ABCD*. 2°. Que les autres diagonales avec celles-ci, forment ſix quarrez égaux à *ABCD*, leſquels font un cube inſcrit dans la même ſphere que le *dodecaëdre*; ainſi chaque côté de ce cube eſt égal à chaque diagonale des pentagones.



1°. Toutes ces diagonales ſont égales, ſoutenant des angles égaux.

2°. Concevons que des quatre points *A*, *B*, *C*, *D* qui ſont ſur la ſphere où le *dodecaëdre* eſt inſcrit, on ait mené des lignes au centre de la ſphere, cela fera une pyramide quadrilaterale, dont le plan qui couperoit la ſphere & paſſeroit par ces quatre points feroit la baſe.

3°. Cette ſection de la ſphere par le plan *ABCD* ſera un cercle *. Or on ne peut inſcrire aucune figure de quatre côtez égaux dans un cercle, que le ſeul quarré; car ces quatre angles valent quatre droits †: & puiſqu'ils ſont appuyez ſur des arcs égaux, ils ſont égaux. Donc la figure *ABCD*, qui a ſes côtez égaux, & qui eſt inſcrite dans un cercle, eſt un quarré.

4°. Tout pentagone ſe peut réduire en trois triangles; partant la ſurface d'un *dodecaëdre*, com-

* *Sup.* n. 145. † *L.* 2. n. 118.

compoſée de douze pentagones, ſe réduit en trente-ſix triangles. Or chaque quarré égal à *ABCD* en ſoutient ſix, comme il ſe voit dans la figure; donc ces trente-ſix triangles ne peuvent être ſoutenus que par ſix quarrez égaux, qui forment un cube inſcrit dans la même ſphere; & partant il eſt vrai de dire que la diagonale d'un pentagone, qui eſt une des faces du *dodecaëdre* inſcrit dans une ſphere, eſt égale au côté du cube inſcrit dans la même ſphere.

PROBLEME VI.

161 *Trouver le côté d'un* dodecaëdre, *& un cercle capable d'une des faces de ce ſolide.* Eucl. XIII. Prop. 17.

Il faut premierement trouver le côté d'un cube inſcrit dans la ſphere propoſée [a]. Ce côté eſt égal à la diagonale de chaque pentagone face du *dodecaëdre* [b]. Il faut couper ce côté en moyenne & extrême raiſon: la plus grande partie ſera le côté du *dodecaëdre* propoſé [c].

Pour avoir le cercle capable d'une des faces du *dodecaëdre*, il faut faire le pentagone dont on vient de connoitre un des côtez [d], enſuite lui circonſcrire un cercle, qui ſera ce qu'on cherche.

THEOREME X.

162 *Le côté du* dodecaëdre *eſt incommenſurable avec le diametre de la ſphere, tant en lui-même qu'en ſeconde puiſſance.* Eucl. XIII. Prop. 17.

Soit le diametre de la ſphere *b*, celui du côté du cube inſcrit dans la ſphere $c+d$ coupé en moyenne & extrême raiſon, dont *c* la plus grande partie eſt le côté du *dodecaëdre* [e].

2°.

a *ſup. n.* 154. b *ſup. n.* 160. c *L.* 4. *n.* 153.
d *L.* 4. *n.* 159. e *L.* 4. *n.* 153.

2°. c eſt incommenſurable, tant en elle-même qu'en puiſſance, avec $c + d$ [a].

3°. $c + d$ eſt commenſurable en deuxieme puiſſance avec b [b], c'eſt-à-dire, que $cc + 2cd + dd$ eſt commenſurable avec bb. Il faut donc que cc ſoit incommenſurable avec bb; car s'il étoit commenſurable avec bb, il le ſeroit avec le quarré de $c + d$ [c], avec lequel bb eſt commenſurable, puiſque bb eſt le triple de ce quarré [d], par conſéquent cc incommenſurable en puiſſance avec bb, eſt auſſi incommenſurable en lui-même avec b [e].

LEMME II.

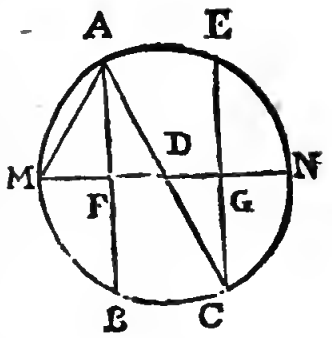
MN *eſt le diametre d'un cercle, dans lequel* 163
les deux cordes AB *&* CE *qui coupent* MN *à angles droits, ſont paralleles entre elles, & la diſtance de* FG *égale à la moitié de chacune; je dis que* MF *ſera le côté d'un décagone inſcrit dans un cercle, dont* FA *ſera le rayon.*

Suppoſant MF ou $GN = x$ & $AF = z + x$: ſi MF ou x eſt le côté d'un décagone, dont AF ou $z + x$ eſt le rayon; il faut qu'ayant coupé AF en moyenne & extrême raiſon, x en ſoit la mediane [f], & que par conſéquent $\div z + x . xz$; ainſi ſi nous démontrons cela, ſavoir que $\div z + x . x . z$, nous avons fait ce qui eſt propoſé.

Puiſque $AF = z + x$; donc $AB = 2z + 2x$, & $BC = z + x$. Le quarré de AB, qui eſt $4zz + 8zx + 4xx$, avec celui de BC qui eſt $zz + 2zz + xx$ ſont égaux à celui de AC ou MN [g]. Or par l'hypotheſe $MN = 3x + z$; car MF & GN ſont chacun égaux à x, & $FG = z + x$: le quarré, dis-je, de $3x + z$ eſt $9xx + 6xz +$

a *L.* 4. *n.* 140. b *ſup. n.* 155. c *L.* 4. *n.* 113. d *ſup. n.* 153.
e *L.* 4. *n.* 115. f *L.* 4. *n.* 151. g *L.* 4. *n.* 78.

$+zz$: mettant donc les deux quarrez de AB & de BC en une ſomme $9xx+6xz+zz = 5zz+10zx+5xx$; ôtant de part & d'autre $5xx+6xz+zz$, il reſtera $4xx = 4zz + 4zx$; diviſant l'un & l'autre par 4, il viendra $xx = zz + zx$;



donc remettant cette égalité en proportion[a] on aura $\div z + x . x . z$, puiſque le produit des extrêmes $z+x$ & z, qui eſt $zz+zx$, eſt égal à xx quarré de la grandeur moyenne x; c'eſt ce qu'il falloit démontrer.

Lemme III.

164 *La ligne* AM *eſt le côté d'un pentagone inſcrit dans un cercle, dont* AF *eſt le rayon.* (Même figure.)

MF eſt le côté du décagone dans un cercle dont *AF* eſt le rayon[b], le quarré de *AF* avec celui de *MF* ſont égaux à celui de *AM*; donc *AM* eſt le côté du pentagone[c].

Lemme IV.

165 *Le quarré de* AF, *ou de* BF, *ou de* GE, *ou de* GC *lignes égales, eſt la cinquieme partie de celui du diametre* AC *ou* MN. (Même fig.)

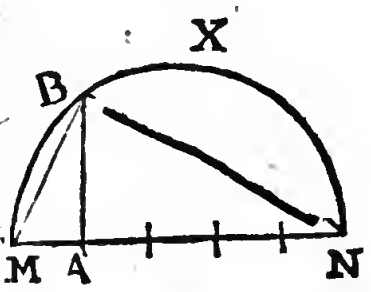
Soit $AF = b$; donc $AB = 2b$, & $BC = b$, le quarré de AB eſt $4bb$, & celui de BC eſt bb. Or ces deux quarrez qui font $5bb$, ſont égaux à celui de AC ou de MN[d]; ainſi il vaut cinq fois celui de AF.

Lem-

a *L.* 3. *n.* 58. b *ſup.* n. 163. c *L.* 4. *n.* 164. d *L.* 4. *n.* 78.

LEMME V.

Trouver une ligne dont le quarré ſoit la cinquieme partie de celui de MN, *diametre de cercle donné.* 166



AM eſt la cinquieme partie de *MN*, le quarré de *MN* peut cinq fois celui de *MB* *; ainſi *MB* ſera la ligne que l'on cherchoit, c'eſt-à-dire, égale à *AF* de la figure précédente, puiſque le quarré de *AF* eſt la cinquieme partie de *MN* †.

PROBLEME VII.

MN *diametre d'une ſphere étant donné, faire un* icoſaëdre. Eucl. XIII. Prop. 16. 167

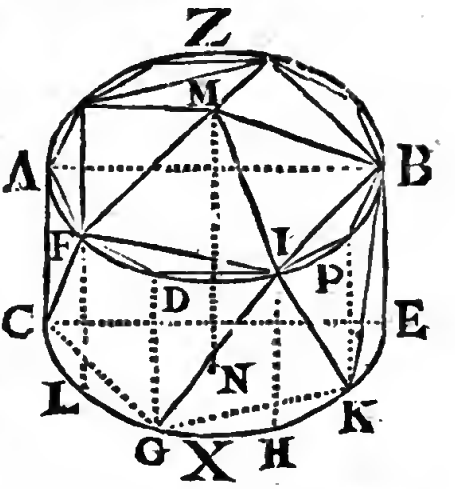
1°. Ayant trouvé la valeur de *AF*, (*Voyez la figure du Lemme 2. pag. préced.*) & l'ayant coupé par la moitié: du centre *D* je fais *DF* & *DG* égales à cette moitié, de ſorte que *FG* = *AF*; après je mene *AB* & *CE*, qui coupent *MN* à angles droits.

2°. Prenant *AB* & *CE* pour diametres, je fais deux cercles que je nomme *Z* & *X*, qui ſont paralleles, (*Voyez la figure ſuivante*,) étant ſur des plans qu'on ſuppoſe paralleles.

3°. J'inſcris dans chacun de ces deux cercles un pentagone, & de chaque angle je mene des lignes droites à *M* & à *N* extrémités du diametre de la ſphere; ce qui fait cinq triangles, dont les côtez ſont égaux chacun au côté du pentagone inſcrit dans ces deux cercles, par le Lemme troiſieme; ainſi tous les

* *L. 4. n. 63.* † *ſup. n. 165.*

les côtez de ces triangles étant tous égaux aux côtez des pentagones, forment deux angles ſolides ſur les cercles *Z* & *X* chacun de cinq triangles équilateraux, dont le ſommet eſt aux extrémitez *M* & *N* du diametre de la ſphere, & voilà déja dix faces trouvées de l'*icoſaëdre*.



On n'a pas jugé à propos de marquer l'angle ſolide ni ſes côtez dont le ſommet eſt N, *de peur de rendre la figure confuſe; il y faut ſuppléer par la penſée.*

4°. J'inſcris encore dans ces mêmes cercles *Z* & *X* un décagone, dont je joins les angles qui ſe répondent dans *X* & *Z* par les lignes *BE*, *PK*, *IH*, *DG*, *FL*, &c. qui par l'hypotheſe ſeront toutes égales aux rayons de *Z* & de *X*.

5°. Je mene les diagonales *BK*, *KI*, *IG*, *GF*, &c. Les quarrez *BP*, côté du décagone, avec celui de *PK*, qui eſt égal au rayon de *Z* & de *X*, ſont égaux à celui de *BK* *: donc *BK* eſt le côté du pentagone inſcrit dans *X* & dans *Z* †. La même choſe ſe démontre de *KI*, de *IG*, de *GF*, &c. les triangles *BKI*, *KIG*, *IGF*, &c. ont pour baſe les côtez dudit pentagone; ils ſont donc équilateraux entre eux, & aux dix qui compoſent les deux angles ſolides, dont nous avons parlé ci-deſſus: par conſéquent il y a entre *Z* & *X* dix de ces triangles, dont cinq ont

* *L.* 4. *n.* 78. † *L.* 4. *n.* 164.

ont leurs baſes ſur *Z*, & les cinq autres ſur *X*, leſquels avec les dix déja trouvez font les vingt triangles égaux & équilateraux qui doivent compoſer l'*icoſaëdre*; ce qu'il falloit faire.

Corollaire I.

Le quarré du diametre de la ſphere eſt quintuple du quarré du rayon du cercle X *ou* Z, *qui eſt la baſe d'un angle ſolide fait de cinq équilateraux.* 168

Cela a été démontré dans ce Theorême, & ailleurs *.

Corollaire II.

Le diametre MN *eſt compoſé du côté de l'hexagone, ou du rayon des cercles* Z *&* X, *& de deux côtez du décagone inſcrit dans ces cercles.* 169

Cela a été démontré dans ce Théorême, & ci-devant ‡.

Corollaire III.

*Les côtez des triangles de l'*icoſaëdre *ſont égaux aux côtez des pentagones inſcrits dans* Z *ou* X. 170

Theoreme XI.

*Les côtez de l'*icoſaëdre *ſont incommenſurables, tant en eux-mêmes qu'en puiſſance, avec le diametre de la ſphere où l'*icoſaëdre *eſt inſcrit.* Euclid. XIII. Prop. 16. 171

Le quarré du rayon des cercles qu'on décrit pour faire l'*icoſaëdre*, eſt la cinquieme partie de celui du diametre de la ſphere ‡. Soit ce quarré *bb*, partant celui du diametre de la ſphere eſt 5 *bb*. Ces deux quarrez ſont donc com-

* *ſup.* n. 165. ‡ *ſup.* n. 163. ‡ *ſup.* n. 162.

commenſurables, étant comme 1 à 5. Soit x côté des triangles qui ſont l'*icoſaëdre*, lequel x eſt un des côtez d'un pentagone inſcrit dans un cercle dont b eſt le rayon *, partant bb & xx quarrez du côté du pentagone dont b eſt le rayon, ſont incommenſurables, auſſi bien que leurs racines x & b †. Et puiſque le quarré bb du rayon eſt commenſurable avec le quarré du diametre de la ſphere, il faut que xx ſoit incommenſurable avec le quarré de ce diametre; car s'il étoit commenſurable avec lui, il le ſeroit ‡ avec celui de b; & ſi xx & le quarré du diametre ſont incommenſurables, x & le diametre le ſont auſſi, puiſque les raiſons des quarrez ſont doublées de celles de leurs racines, & qu'ainſi ſi les doublées ſont ſourdes, il faut que les compoſantes le ſoient auſſi: car le produit de deux nombres eſt un nombre.

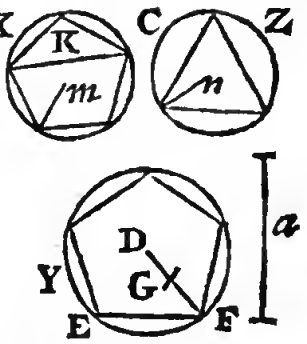
THEOREME XII.

172 *Le même cercle comprend le pentagone qui eſt une des faces du* dodecaëdre, *& le triangle équilateral qui eſt une des faces de l'*icoſaëdre. Eucl. XIV. Prop. 3.

X & Z ſoient deux cercles, dans leſquels ſuppoſé que le pentagone de X eſt une des faces d'un *dodecaëdre*, & le triangle équilateral de Z une des faces de l'*icoſaëdre*, ces deux corps inſcrits dans une même ſphere dont le diametre eſt a. Il faut prouver que m, rayon de X, eſt égal à n rayon de Z.

Je fais le pentagone Y dont chaque côté eſt égal au côté de l'équilateral, face de l'*icoſaëdre*. Ce pentagone eſt ainſi la baſe de cinq des triangles de l'*icoſaëdre* ‡. Je coupe DF, rayon

* *ſup.* n. 170. † *L.* 4. n. 170. ‡ *L.* 4. n. 113. ‡ *ſup.* n. 170.



rayon de γ, au point G en moyenne & extrême raiſon. DG la plus grande partie eſt le côté du décagone [a]. Soit pareillement coupé BC en moyenne & extrême raiſon au point K, la plus grande partie BK ſera égale au côté de ce pentagone [b]: donc $BC. DF :: BK. DG$ [c]; ainſi $\overline{BC}^2 . \overline{DF}^2 :: \overline{BK}^2 . \overline{DG}^2$ [d], & $3\overline{BC}^2 . 5\overline{DF}^2 :: 3\overline{BK}^2 . 5\overline{DG}^2$ [e]. Or BC eſt égal au côté de l'*hexaëdre* [f], dont trois quarrez ſont égaux à aa, quarré du diametre de la ſphere dans laquelle il eſt inſcrit [g]. Et $5\overline{DF}^2$ eſt auſſi égal à aa [h]: donc $3\overline{BC}^2 = 5\overline{DF}^2$. Ainſi dans la proportion ci-deſſus, y ayant égalité entre $3\overline{BC}^2$ & $5\overline{DF}^2$, il y aura auſſi égalité entre $3\overline{BK}^2$ & $5\overline{DG}^2$: donc puiſque $\overline{FE}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{DG}^2$ [i]: donc $5\overline{FE}^2 = 5\overline{DF}^2 + 5\overline{DG}^2$: donc auſſi $5\overline{FE}^2 = 3\overline{BC}^2 + 3\overline{BK}^2$: car on vient de faire voir $3\overline{BC}^2 = 5\overline{DF}^2$, & $3\overline{BK}^2 = 5\overline{DG}^2$.

Mais $3\overline{BC}^2 + 3\overline{BK}^2 = 15mm$ [k], & $5\overline{FE}^2 = 15nn$ [l]: car FE eſt ſuppoſé égal au côté du triangle équilateral dont n eſt le rayon, & par cor-

a *L.4. n.151.* b *L 4. n.153.* c *L.4. n.67.* d *L. 3. n.84.* e *L.3. n.54.* f *ſup. n.160.* g *ſup. n.153.* h *ſup. n.168.* i *L. 4. n.164.* k *L.4. n.165.* l *L. 4. n.146.*

conſéquent puiſque $15mm = 3\overline{BC}^2 + 3\overline{BK}^2 = 5\overline{FE}^2 = 15nn$. Donc $15mm = 15nn$, ou $mm = nn$, & conſéquemment $m = n$; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME VIII.

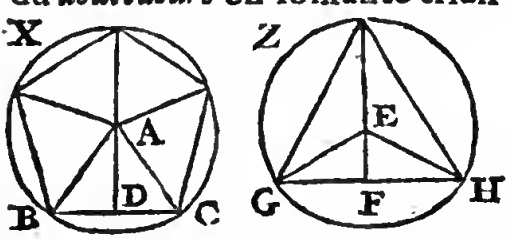
173 *Le diametre d'une ſphere étant donné, trouver les côtez des cinq corps réguliers qui y ſont inſcrits.* Eucl. XIII. Prop. 18.

Il faut faire ce qui a été enſeigné pour trouver le rapport de chaque côté des corps réguliers avec le diametre de la ſphere où ils ſont inſcrits.

THEOREME XIII.

174 *La ſurface du* dodecaëdre *eſt égale à trente fois le rectangle fait d'un des côtez du pentagone une de ſes faces, & de l'apothême de ce pentagone; & celle de l'*icoſaëdre *à trente fois le rectangle fait d'un des côtez de l'équilateral une de ſes faces, & de l'apothême de ce triangle.* Eucl. XIV. Prop. 4.

Ayant mené des lignes du centre du pentagone & de l'équilateral à leurs angles, *X* ſera partagé en cinq triangles, & *Z* en trois; ainſi les douze faces du *dodecaëdre* en ſoixante triangles, comme les vingt faces de l'*icoſaëdre* en ſoixante. Or chacun de ces triangles, comme *ABC*, eſt égal au rectangle de *AD* apothême, & de *BD* moitié de *BC*, comme auſſi *GEH* au rectangle de *EF* par *GF* moitié de *GH**: Donc, &c.



Co-

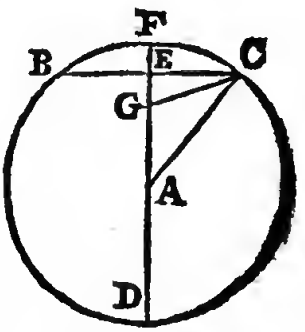
* L. 2. n. 135.

COROLLAIRE.

La ſurface du dodecaëdre *eſt donc à celle de* 175
*l'*icoſaëdre, *comme* AD×BD *eſt à* EF×FG.

LEMME VI.

L'Apothême du pentagone eſt égal à la moitié 176
d'une ligne égale au côté de l'hexagone & du décagone inſcrit dans le même cercle. Euclid. XIV. Prop. 1.



BC eſt le côté d'un pentagone, par conſéquent *FC* côté de la moitié de l'arc *BFC*, eſt le côté du décagone, & *AC* rayon du cercle côté de l'hexagone. *AE* eſt l'apothême du pentagone. Il faut prouver que *AE* eſt égal à la moitié de $AC + CF$. Je fais *GE* égale à *EF*; & partant $GC = FC$ *.

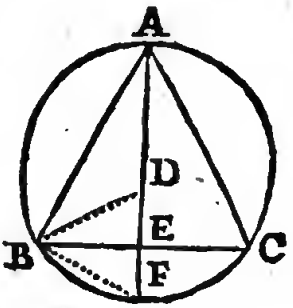
1°. *FC* étant la dixieme partie du cercle de l'angle *FAC*, eſt de trente-ſix; & puiſque l'arc *CD* vaut quatre fois trente-ſix degrez, donc l'angle *CFD* eſt de ſoixante-douze double de trente-ſix †. Puiſque $GC = CF$: dont *FCG* eſt iſoſcele, donc l'angle *FGC* ſera auſſi de ſoixante-douze degrez: donc *CGA* eſt de cent huit ‡. Ajoutez *GAC* de trente-ſix, cela fera cent quarante-quatre que j'ôte de cent quatre-vingts, reſte trente-ſix valeur de *ACG*, qui eſt ainſi égal à *GAC*; par conſéquent $AG = GC = FC$: donc $AG = FC$. Ainſi $AG + GE = FC + FE$, ou $AE = FC + FE$: Donc $AE + EF + FC$ eſt le double de *AE*: donc *AE* eſt la moitié de $AE + EF$ (ou *AF*

* L. 1. n. 58. † L. 2. n. 59. ‡ L. 2. n. 17.

AF rayon) $+ FC$; & par conſéquent moitié du côté de l'hexagone, & de *FC* côté du décagone.

LEMME VII.

177 ABC *eſt un équilateral*, AE *une perpendiculaire qui coupe* BC: *je dis que* DE = EF.

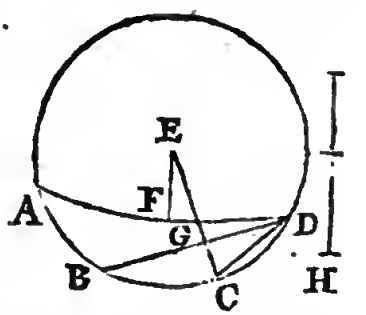


BF eſt côté de l'hexagone, ainſi égal au rayon *BD*; donc $DE = EF$ [a].

THEOREME XIV.

178 *La ſurface du* dodecaëdre *eſt à celle de l'*icoſaëdre, *comme le côté du cube eſt au côté de l'*icoſaëdre, *inſcrits en une même ſphere*. Eucl. XIV. Prop. 5.

AD eſt le côté du triangle face de l'*icoſaëdre*, & *BD* eſt le côté du triangle face du *dodecaëdre* qu'un même cercle peut comprendre [b]. *EF* coupe par la moitié *AD*, comme *EC* coupe par la moitié *BD*; & par conſéquent l'arc *BCD* [c]: de *CD* eſt la corde du décagone. *H* eſt le côté d'un cube inſcriptible en la même ſphere.



1°. $\div EC + CD$. *EC*. *CD* [d]. Or *EG* eſt la moitié de $EC + CD$, & *EF* la moitié de *EC* [e], comme auſſi $EG - EF$ moitié de *CD*: car $2EG = EC + CD$ [g], & $2EF = EC$ [h]: donc $2EG$

a *L.* 1. *n.* 61. b *ſup.* n. 172. c *L.* 1. *n.* 92. d *L.* 4. n. 154. e *ſup.* n. 176. f *ſup.* n. 177. g *ſup.* n. 176. h *ſup.* n. 177.

$2EG = 2EF + CD$. Otant de part & d'autre $2EF$, vient $2EG - 2EF = CD$: donc $EG - EF$ eſt moitié de CD. On a vu que $\div EC + CD.\ EC.\ CD$: donc leurs moitiez ſont en même raiſon; ainſi $\div EG.\ EF.\ EG - EF$. Mais la ligne H étant le côté du cube, ſi on la coupe en moyenne & extrême raiſon, BD ſera ſon plus grand ſegment [a]. Ainſi $\div H.\ BD.\ H - BD$. Donc $H.\ BD :: EG.\ EF$ [b]. Donc $H \times EF = BD \times EG$. Or $H.\ AD :: H \times EF.\ AD \times EF$ [c]. Donc $H.\ AD :: BD \times EG.\ AD \times EF$; c'eſt-à-dire, comme H côté du cube eſt à AD côté de l'*icoſaëdre*, de même $BD \times EG$ eſt à $AD \times EF$; mais ces deux produits ſont entre eux en même proportion que les ſurfaces du *dodecaëdre* & de l'*icoſaëdre* [d]: donc &c. Ce qu'il falloit démontrer.

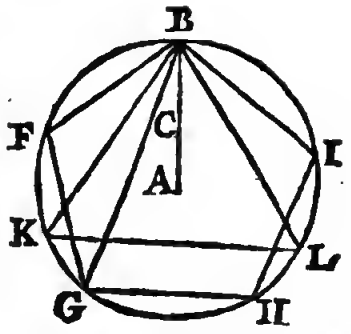
Theoreme XV.

AB *rayon étant coupé en* C *en moyenne & extrême raiſon, &* AC *le plus grand ſegment, le quarré de* BG *côté du* cube, *ſera à celui de* BK *côté de l'*icoſaëdre, *comme* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ *eſt à* $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Eucl. XIV. Prop. 6. 178

Soit $BFGHI$ un pentagone une des faces du *dodecaëdre*, & BKL un triangle face de l'*icoſaëdre*; ce qui eſt poſſible [e]. BG eſt le côté du *cube* inſcrit dans une même ſphere [f]: donc $\overline{BK}^2 = 3\overline{AB}^2$ [g]. Or $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = 3\overline{AC}^2$ [h]: donc $\overline{BK}^2$ eſt triple de $\overline{AB}^2$, comme $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$ eſt

a *ſup. n.* 160. & *L.* 4. *n.* 153. b *L.* 4. *n.* 67. c *L.* 4. *n.* 75. d *ſup. n.* 175. e *ſup. n.* 172. f *ſup. n.* 160. g *L.* 4 *n.* 146. h *L.* 4. *n.* 70.

est triple de $\overline{AC}^2$. Ainsi $\overline{BK}^2 . \overline{AB}^2 :: \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 . \overline{AC}^2$. *Permutando* $\overline{BK}^2 . \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 :: \overline{AB}^2 . \overline{AC}^2$. Or BF est le plus grand segment de BG côté du cube coupé en moyenne & extrême raison [a]: Donc $\overline{AB}^2 . \overline{AC}^2 :: \overline{BG}^2 . \overline{BF}^2$ [b], : : $\overline{BK}^2$, $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$ [c]. *Permutando* $\overline{BG}^2 . \overline{BK}^2 :: \overline{BF}^2 . \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$, Or $\overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ [d]. AB & AC étant côtez de l'hexagone & du decagone [e]. Mettant $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ en la place de $\overline{BF}^2$, nous aurons $\overline{BG}^2 . \overline{BK}^2 :: \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 . \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$; ce qu'il falloit prouver.



THEOREME XVI.

180 *Comme le côté du* cube *est au côté de l'*icosaëdre, *ainsi le* dodecaëdre *est à l'*icosaëdre *inscrits dans une même sphere.* Eucl. XIV. Prop. 7.

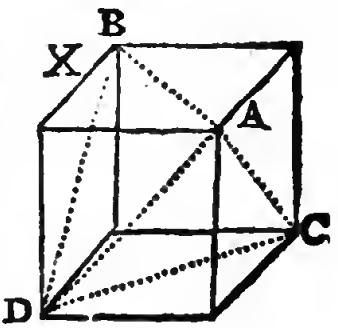
Concevez que de tous les angles d'un *dodecaëdre*, & de même de l'*icosaëdre*, on ait mené des lignes au centre de la sphere. Cela fera dans l'un douze pyramides, & dans l'autre vingt, qui seront de même hauteur, puisque le même cercle dans la sphere comprend une des faces de l'*icosaëdre* & du *dode-*

a *Sup. n.* 160. b *L.* 4. *n.* 67. c *L.* 3. *n.* 53.
d *L.* 4. *n.* 164. e *L.* 4. *n.* 151.

decaëdre [a]; ainſi ces pyramides ſont comme leurs baſes [b], c'eſt-à-dire, comme les ſurfaces de ces deux polyédres. Or ces ſurfaces ſont entre elles [c] comme le côté du *cube* au côté de l'*icoſaëdre*.

PROBLEME VII.

Inſcrire un tetraëdre *dans un* cube. Euclid. XV. Prop. 1. 181.



De *A* un des angles du cube *X*, concevant qu'on ait mené les diagonales *AB*, *AC*, *AD*, & *BD*, *BC*, *CD*, vous appercevrez *ABCD* un *tetraëdre* ou pyramide de quatre triangles équilateraux, car les diagonales ſont égales; ainſi le triangle $ABC = BAD$, &c.

Il faut avoir à la main les corps réguliers dont on parle. Il eſt facile de les faire ſelon qu'on l'a enſeigné [d]. *Tout ce qu'on va lire ſera aiſé, faiſant ſur chaque corps ce qu'on dit ici qu'il y faut faire; autrement les démonſtrations ſuivantes ſeront obſures.*

PROBLEME VIII.

Inſcrire un octaëdre *dans une pyramide ou* tetraëdre. Eucl. XV. Prop. 2. 182

Coupez par la moitié tous les ſix côtez de la pyramide ou tetraëdre; joignez les points de ſection par douze lignes qui ſeront toutes égales, & feront huit triangles équilateraux.

a *ſup.* n. 172. b *ſup.* n. 123. c *ſup.* n. 198.
d *ſup.* n. 144.

PROBLEME IX.

183 *Dans un cube faire un* octaëdre. Eucl. XV. Prop. 3.

Ayant pris le centre de chaque face du cube, il faut joindre ces centres en tirant des lignes autant qu'il en faut; ſavoir douze, qui étant toutes égales feront huit triangles égaux, & par conſéquent un *octaëdre*.

PROBLEME X.

184 *Dans un* octaëdre *faire un* cube. Eucl. XV. Prop. 4.

1°. Coupez par la moitié tous les côtez de l'*octaëdre*. 2°. Menez des lignes par toutes ces ſections ſur les faces de ce corps, ces lignes ſeront toutes égales, & feront deux quarrez oppoſez, leſquels joignant par quatre autres lignes qui ſeront égales aux premieres, & les oppoſées étant paralleles, elles feront un cube; ce qui eſt évident.

PROBLEME XI.

185 *Faire un* dodecaëdre *dans un* icoſaëdre. Eucl. XV. Prop. 5.

Cinq triangles de l'*icoſaëdre* qui font un angle ſolide ou une pyramide, ont pour baſe un pentagone *. Il faut couper tous les côtez de cette pyramide par la moitié; le plan de cette ſection ſera un pentagone & une des faces du *dodecaëdre*; car en faiſant la même choſe à tous les angles ſolides ou pyramides de l'*icoſaëdre* qui ſont au nombre de douze, on aura douze pentagones égaux, qui feront les douze faces du *dodecaëdre*.

AVER-

* *ſup.* n. 167.

AVERTISSEMENT.

Le diametre de la ſphere étant ſuppoſé 1000, les côtez des corps réguliers inſcrits dedans ſeront à peu près comme les nombres ſuivans.

Le *Tetraëdre*	816
L'*Octaëdre*	707
L'*Hexaëdre* ou *Cube*	577
L'*Icoſaëdre*	527
Le *Dodecaëdre*	357

ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
OU
DE LA MESURE
DE L'ETENDUE.

LIVRE SIXIEME.

De la Méthode.

AVERTISSEMENT.

LA Méthode que nous avons ſuivie juſqu'à préſent, ç'a été de conſiderer l'idée des choſes dont nous parlions, & d'en tirer leurs proprietez. Par exemple, quand il s'eſt agi de démontrer les proprietez du Cercle, nous avons conſideré quelle étoit la figure à qui on donnoit ce nom; comment elle ſe faiſoit; ce qu'elle étoit: & c'eſt de l'idée de cette figure, que nous avons déduit ſes proprietez. Cette méthode ſuppoſe la choſe connue. Ces Elémens m'étoient connus avant que de les écrire; & ce que j'ai fait, ç'a été de faire appercevoir dans l'idée des choſes, ce qui y eſt, & ce que j'y avois vu. Il y a une autre méthode

avec

avec laquelle on trouve ce qu'on ne connoiſſoit pas, & que j'ai employée moi-même dans ces Elémens en beaucoup d'occaſions, pour trouver ce que je ne ſavois point; c'eſt pourquoi on l'appelle Méthode d'Invention, *au-lieu que la premiere ſe peut nommer* Méthode de Doctrine. *Cette ſeconde eſt très-générale; & proprement elle ne ſuppoſe aucune connoiſſance. J'en ai déja parlé dans les Elémens des Mathématiques; mais je l'applique ici à la Géometrie, & je la traite d'une maniere particuliere; ainſi ce qu'on va voir n'eſt point une repetition inutile.*

CHAPITRE PREMIER.

De la méthode qu'il faut ſuivre dans l'examen d'une Queſtion, ou Problême. En premier lieu, il la faut bien concevoir, & l'exprimer nettement.

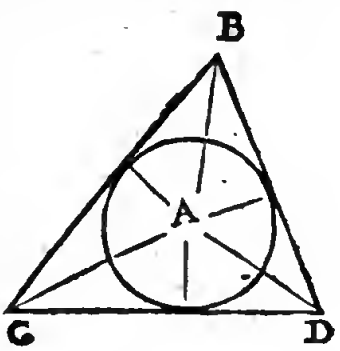
CE n'eſt que par l'application de l'eſprit, qu'on atteint la verité: on ſe diſtrait facilement. Pour remedier à ce défaut, il faut arrêter ſon eſprit, exprimant par une figure ce qu'il doit conſiderer; ce qui n'eſt pas impoſſible, quoiqu'on ne connoiſſe pas entierement les choſes qui ſont en queſtion. Il faut bien qu'on ne les ignore pas entierement; autrement, ſi elles n'avoient aucune priſe, ce ſeroit en vain qu'on les attaqueroit. Or ce peu de connoiſſance donne lieu de ſuppoſer, que ſelon qu'on le propoſe, elles doivent être faites de telle & telle maniere. On peut donc tirer certaines lignes conformément à cette ſuppoſition. Ces lignes, puiſque l'on les tire telles qu'elles 1

doivent être, ſont connues; &, comme on le va voir, elles peuvent faire connoitre celles qu'on cherche. La premiere choſe qu'on doit faire, c'eſt de bien exprimer ce qui eſt en queſtion, & qu'on veut connoitre. L'importance, c'eſt que cette expreſſion ſoit nette, qu'on y voye ce qu'il faut chercher, & qu'elle ſoit débaraſſée de ce qui ne ſerviroit qu'à la rendre obſcure. Cela ſe comprendra mieux dans les exemples ſuivans, où l'on va voir que la ſeule expreſſion réſout ſouvent des queſtions difficiles. J'entens ici les expreſſions qui ſe font par des figures, auſſi-bien que par des diſcours.

QUESTION.

2 *Démontrer que la ſurface d'un triangle eſt égale à la moitié de la ſomme de ſes trois côtez, multipliez par le rayon d'un cercle qui lui eſt inſcrit.*

La ſeule vue de cette figure démontre, que cela eſt veritable. Des angles du triangle *BCD* ayant mené des lignes au centre *A* du cercle qui lui eſt inſcrit, on fait les trois triangles *BAC*, *CAD*, *DAD* égaux enſemble au triangle *BCD*, & qui ont pour hauteur le rayon de ce cercle. Ils ſont donc égaux à un triangle, dont la baſe eſt égale aux trois côtez de *BCD*, & qui a pour hauteur le rayon du cercle inſcrit *; la ſurface de ce triangle eſt donc égale au produit de la moi-



* *L.* 2. *n.* 143.

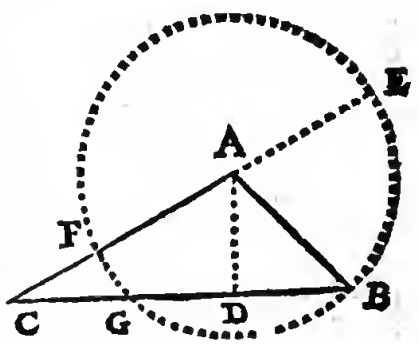
moitié de ſa baſe par ſa hauteur; ce qu'il falloit prouver.

Voyons encore par un autre exemple, combien la maniere d'exprimer une queſtion par une figure convenable, en facilite la réſolution.

QUESTION.

Démontrer que dans le triangle ABC, *ſi de l'angle* CAB *on mene une perpendiculaire ſur* BC, *la ſomme des deux côtez* AB *&* AC *eſt à* BC, *baſe de l'angle que ces deux côtez comprennent, comme la difference de* CD *&* BD *eſt à celle de* AC *&* AB. 3

Pour trouver la démonſtration de ce Théorême, & l'exprimer d'une maniere qui facilite l'invention, de *A* comme centre, & de l'intervalle *AB* le plus petit côté, je fais un cercle: Et puiſque *AB* eſt égal à *AE*, la ligne *CE* eſt la ſomme des côtez *AC* & *AB*. Les lignes *AF* & *AB* ſont égales; donc *CF* eſt leur difference. Puiſque auſſi *DB* = *DG*, la ligne *GC* ſera la difference entre *CD* & *DB*. Ainſi voilà une expreſſion, ou une figure, qui marque ce que l'on cherche. Après quoi la queſtion ſe réſout facilement; car *CE* × *CF* = *CB* × *CG* *: donc *CE. CB* :: *CG. CF* †; ce qu'il falloit démontrer.



* *L. 4. n. 57.* † *L. 3. n. 58.*

CHAPITRE II.

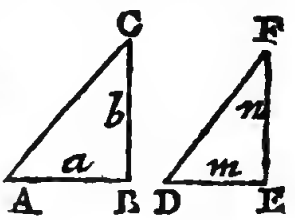
4 *On peut exprimer les lignes & toutes les grandeurs, dont il eſt parlé dans une queſtion, & faire ſur elles toutes les operations de l'Arithmetique, ſans les connoitre.*

CEtte méthode, que nous enſeignons ici, eſt fort générale, & fort differente de celle qu'on a ſuivie juſqu'à préſent. Nous recherchions les proprietez de quelque figure; & il s'agiſſoit de la maniere qu'on pouvoit trouver ſes proprietez, & les démontrer. Ici on ne conſidere autre choſe dans les Grandeurs qu'on examine, ſinon qu'on les peut ajouter à d'autres grandeurs, ou les retrancher ſi elles ſont petites: qu'on les peut multiplier, ou diviſer. On a enſeigné dans le troiſieme Livre, comment cela ſe peut faire de tout ce qui eſt grand, c'eſt-à-dire, capable du plus ou du moins, ſoit lignes, ſoit nombres. Ainſi cette méthode eſt déja expliquée en partie, & nous en avons fait un uſage par-tout. Si on a lu les Livres précédens, on ne peut donc ignorer que par $a+b$, on peut entendre deux lignes a & b ajoutées enſembles; par $a-b$, qu'on a retranché b de a; par ab qu'on a multiplié a par b ou b par a; qu'ainſi ab eſt un rectangle, dont les lignes a & b ſont les côtez; que aa ou a^2 eſt un quarré, dont la ligne a eſt un des côtez; que $\frac{ab}{b}$ eſt un rectangle, ou plan diviſé par b, après laquelle diviſion il ne reſte que le côté a, c'eſt-à-dire, que ce n'eſt plus qu'une ligne, ſuivant ce qu'on a enſeigné au commen-

mencement du Livre troiſieme, qu'on peut effacer la lettre qui eſt au-deſſus & au-deſſous du ſigne de la diviſion; qu'ainſi $\frac{ab}{b} = a$.

Les puiſſances s'expriment de même, auſſi- 5
bien par lettres que par lignes; ainſi on marque par lettres les rapports des figures; car ſi un triangle eſt rectangle, dont l'hypothenuſe eſt a & les deux côtez b & c, ſuivant qu'on l'a enſeigné [a], ou [b] $aa = bb + cc$, ou $a^2 = b^2 + c^2$, & $a^2 - b^2 = c^2$, & $a^2 - c^2 = b^2$.

Tous les rapports des triangles ſemblables ſe 6
peuvent exprimer de même par lettres; car ſi ABC & DEF ſont ſemblables, que $AB = a$, & $BC = b$, & $DE = m$, & $EF = n$; alors $a.b :: m.n$: Et puiſque, ſelon ce qui a été dit [c], multipliant b par m, & diviſant le produit bm par le premier terme a, le quotient $\frac{bm}{a}$ eſt le quatrieme: donc $EF = \frac{bm}{a}$, & par le même raiſonnement $\frac{bm}{n} = AB$. Ce qui donne le moyen de marquer les rapports des lignes, auſſi-bien que des nombres.



Cette maniere générale d'exprimer toute 7
grandeur, & de faire ſur elle les operations qu'on fait ſur les nombres, eſt ce qu'on appelle l'Algebre, comme nous l'avons dit [d]. Elle eſt difficile à ceux qui n'ont pas coutume de s'en ſervir; ce qui n'arrivera pas à ceux qui ſe ſont ſervis de nos Elémens. Remarquez que dans la

a *L.2.n.142.* b *L.4.n.78.* c *L.3.n.60.* d *L.3. Sect.2.*

multiplication l'on peut réduire un produit à une proportion: par exemple, le produit de a par b, à une proportion dont le premier terme ſoit l'unité; le ſecond & le troiſieme ſoient les deux grandeurs a & b, qui ſe multiplient; & le quatrieme terme ſoit ab, qui eſt le produit de la multiplication, ce qui eſt évident: car, ſoit ce quatrieme terme nommé x: donc 1. a :: b. x. Or $\frac{ab}{1} = x$*. Mais l'unité ne diviſant point, comme ne multipliant point: donc $\frac{ab}{1} = ab$, & partant $ab = x$. Par-tout où l'unité n'eſt point, on la peut ſuppoſer, puiſqu'elle n'apporte aucun changement. Ainſi le produit de trois lettres, comme abc, peut marquer ces deux proportions:

1. c:: ab. abc; & 1. ab:: c. abc. Cela fait voir que le produit de quatre lignes $abcd$, marque trois proportions; le produit de cinq lignes $abcde$, marque quatre proportions; & dans ces proportions le produit total n'eſt qu'une ligne, qui réſulte de toutes ces proportions, lorſque le premier terme eſt l'unité; car puiſque

1. a:: b. ab; donc 1. b:: a. ab.

De même, puiſque 1. ab:: c. abc;

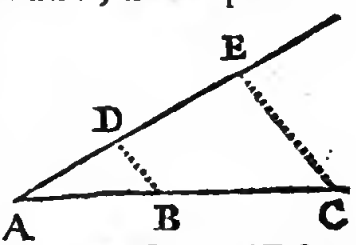
Donc. 1. c:: ab. abc.

Le quotient d'une diviſion exprime une ligne, par exemple, $\frac{a}{b}$: car cela ſe peut réduire à cette proportion b. a:: 1. x: car $\frac{a1}{b}$ ou $\frac{a}{b} = x$.

8 Il eſt facile de faire toutes les operations de l'Arithmétique, avec le compas & la règle. On peut

* *L.* 3. *n.* 60.

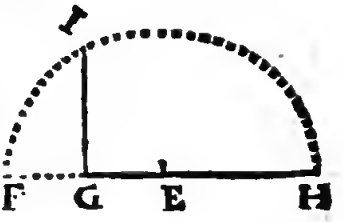
peut ajouter une ligne à une autre ligne, ou retrancher une plus petite d'une plus grande. Pour la multiplication d'une ligne par une ligne, c'eſt-à-dire pour trouver une ligne qui ſoit égale au produit de deux lignes, voilà ce qu'il faut faire. Soient ces deux lignes *AD* & *AC* qu'on veut multiplier l'une par l'autre ; il faut prendre ſur *AC* la ligne *AB* égale à l'unité, & mener une ligne *AD* qui faſſe un angle à diſcretion avec *AB*. Je tire une ligne par *D* & *B*, & une autre par *C* qui lui ſoit parallele ; ce qui étant fait, *AE* ſera la ligne que l'on cherche : car *AB*. *AD* :: *AC*. *AE* : donc $AB \times AE = AD \times AC$. La multiplication n'augmente pas une grandeur, qui n'eſt multipliée que par l'unité, c'eſt-à-dire, qui n'eſt priſe qu'une fois ; Ainſi comme *AB* eſt l'unité, en multipliant *AE*, elle ne l'augmente point. Donc *AE* qui eſt une quatrieme proportionnelle, ſera égale au produit de *AD* par *AC* ; ce que l'on cherchoit.



Si l'on veut diviſer *AE* par *AC*, ayant pris *AB* égale à l'unité, & mené par *B* une parallele à *CE*, on aura *AD* qui ſera la valeur de *AE* diviſée par *AC* ; car *AB*. *AD* :: *AC*. *AE*, & l'unité eſt au quotient d'une diviſion, comme le diviſeur eſt à la grandeur diviſée. 9

S'il faut tirer la racine quarrée de *GH*, je lui ajoute une ligne droite *FG* qui ſoit l'unité, & diviſant *FH* en deux parties égales au point *E* : du centre *E* je fais le cercle *FIH* : élevant enſuite du point *G* une ligne droite juſqu'à *I* à angles droits ſur *FH*, la ligne *GI* eſt la racine que l'on cherche : car $\div FG.GI.GH$. Donc le quar- 10

quarré de *GI*, eſt égal au produit de *GH*. Or, *FG* étant l'unité, elle n'augmente point la valeur de *GH* en la multipliant, ainſi *GH* eſt égale au quarré de *GI*, qui par conſequent eſt la racine de *GH*. Par ce même moyen on peut trouver une ligne, qui ſoit égale à la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas quarré; par exemple, qui ſoit égale à la racine d'un quarré qui vaut 18 : car prenant *GH* égale à 18, & lui ajoutant *FG* égale à l'unité; & de *E* milieu de cette ligne, comme centre, faiſant un cercle, la ligne *GI* ſera égale à la racine quarrée de 18, qui ne peut être exprimée par aucun nombre, comme nous l'avons vu dans le quatrieme Livre.



CHAPITRE III.

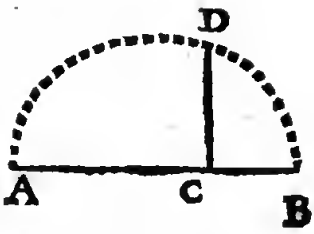
11 *Après avoir exprimé une Queſtion ou Problême, & fait la figure qui lui convient, il faut diſtinguer ce qui y eſt connu d'avec ce qui ne l'eſt pas; & conſiderer ſi le Problême eſt déterminé, ou indéterminé.*

APrès qu'on a conçu nettement une Queſtion ou un Problême, & fait la figure qui en exprime les conditions, il faut diſtinguer ces trois choſes. 1°. Les lignes qui ſont connues. 2°. Celles qui ne le ſont pas. 3°. Tous les rapports que ces lignes connues & inconnues peuvent avoir entre elles. Une partie des lignes qu'on tire pour exprimer le Problême ſont connues,

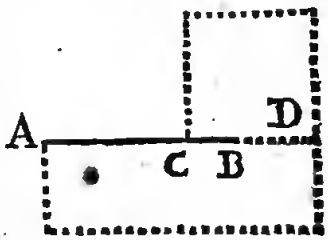
nues, les autres ſont ſuppoſées, c'eſt-à-dire, qu'on ſuppoſe qu'elles doivent avoir tels & tels rapports avec les lignes qui ſont connues. Or aujourd'hui c'eſt la coutume de marquer, par les premieres lettres de l'Alphabet, les lignes qui ſont connues, les nommant ou a, ou b, ou c, ainſi de ſuite. On marque avec les dernieres x, y, z, celles qui ſont inconnues: quelquefois il eſt bon de ſe ſervir des premieres lettres du nom des grandeurs connues & inconnues; par exemple marquant un nombre par n, une ſomme par s, le tems par t, la vîteſſe par v. Enſuite il faut conſiderer ſi de la maniere que le Problême eſt propoſé, il dépend de la volonté de choiſir certaines grandeurs, tirer certaines lignes, ou ſi toutes celles que la queſtion renferme, ſont déterminées, de ſorte que tout ce que l'on peut faire, ſoit de leur donner des noms convenables. Il faut donc examiner d'abord ſi la Queſtion eſt déterminée, ou indéterminée. Dans une Queſtion indéterminée, on n'y apperçoit point de rapport, qui donne le moyen d'exprimer en deux manieres les grandeurs inconnues. Car qu'eſt-ce qui fait que je puis appeller la même grandeur ou x, ou $y + a$? C'eſt que je ſai que x eſt égal à y; après lui avoir ajouté a; que $x = y + a$. C'eſt là un rapport déterminé.

Mais quand, ſans en déterminer aucun, on 12
propoſe par exemple de couper le diametre AB, de ſorte que le rectangle des deux parties ſoit égal à un quarré, ce Problême eſt indéterminé; & je ne puis trouver une double expreſſion, qu'en ſuppoſant un certain rapport; celui-ci par exemple, que AB eſt coupé en C. Après cela, de l'intervalle de la moitié de AB ayant fait un cercle, & élevé ſur C la perpendiculaire CD,

CD, j'aurai ce que je cherche $\div\div AC. CD. CB$ *: donc $AC \times CB = \overline{CD}^2$ †. Un Problême indéterminé peut avoir pluſieurs réſolutions ; car en quelque part du diametre que ſoit C, le quarré de CD ſera égal au rectangle des parties du diametre coupé comme on avoit propoſé de le faire. Je pouvois couper AB ailleurs qu'en C.



13 Un Problême eſt dit déterminé, lorſqu'on n'y peut ſatisfaire qu'en obſervant certaine choſe qui le détermine, & qui ne dépend pas du choix de celui à qui il eſt propoſé, c'eſt-à-dire, que les grandeurs qu'il renferme, ont un certain rapport qui leur eſt particulier. Par exemple, AB étant diviſé en C ; on propoſe de prolonger AB juſqu'en D, point inconnu ; de ſorte que le quarré de CD ſoit égal au rectangle de AD & de BD : alors comme ce prolongement BD eſt déterminé, c'eſt-à-dire, qu'il a une certaine longueur préciſe ; ce Problême eſt déterminé : Et ſuppoſé que $AC = a$, & $CB = b$, & $BD = x$, on aura cette double expreſſion, ſavoir pour le rectangle $ax + bx + xx$, & pour le quarré $bb + 2xb + xx$; leſquelles deux grandeurs ſuivant la ſuppoſition doivent être égales ; ainſi $ax + bx + xx = bb + 2bx + xx$, au moyen de laquelle on pourra connoitre la valeur de x, ſuivant qu'il ſera enſeigné.



CHA-

* *L. 4. n. 29.* † *L. 3. n. 57.*

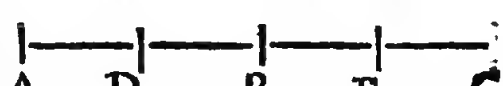
CHAPITRE IV.

La connoiſſance des rapports qui ſont entre les lignes de la figure d'un Problême, donne le moyen de les égaler ou de trouver de doubles expreſſions; ce qui s'appelle Equation. 14

SI on ſait que trois lignes connues, a, b, c ſont en proportion, & que x inconnue eſt le quatrieme terme de cette proportion; qu'ainſi $a. b. :: c. x$ *, alors puiſque $\frac{bc}{a} = x$, on a cette double expreſſion $\frac{bc}{a}$ & x de la même grandeur, & c'eſt ce qu'on appelle *Equation*. Trouver des Equations, c'eſt trouver de doubles expreſſions d'une grandeur inconnue; ce qui ſe peut, quand on connoit quelqu'un de ſes rapports avec les grandeurs connues.

Si on ſait que la ſomme de a & de b eſt égale à l'inconnue x, cette expreſſion $a + b = x$ ſera une Equation. Il eſt évident que *la moitié de deux lignes inégales, moins la moitié de leur difference, eſt égale à la plus petite ligne; & cette même moitié, plus la moitié de leur difference, eſt égale à la plus grande ligne.* 15

Soit la ligne $AC = x + z$, $AD = x$, & $DC = Z$. Soit DE leur difference, dont BD eſt la moitié. Soit $AB = y$ & $DE = 2a$; ainſi DB ou $BE = a$. Il eſt clair que AB



* *L.* 3. *n.* 60.

$AB-DB$, ou $y-a=AD$ ou x, & que $BC+BD$ ou $y+a=DC$ ou z. Ainſi lorſqu'on connoit la difference de deux grandeurs inconnues, on a le moyen de les exprimer de deux manieres.

16 Quand il s'agit de Problêmes de Géometrie, les ſeules figures font ſouvent appercevoir le rapport des lignes, dont il eſt parlé par le Problême; car ſi par exemple je ſai que l'inconnue x eſt l'hypothenuſe d'un triangle rectangle, dont les deux autres côtez ſont d & b, je ſai que $xx=bb+dd$*; ainſi voilà une double expreſſion de x. Un plan eſt fait de la multiplication de ſes deux racines; ſi on le diviſe donc par l'une, le quotient de la diviſion ſera l'autre. Ainſi ſi $b.\ c::\ d.\ x$, puiſque $bx=cd$, diviſant cd par b, le quotient $\frac{cd}{b}=x$. Si x étoit moyenne proportionnelle entre c & d, alors $xx=cd$.

Les figures ou leurs proprietez, qu'on découvre aiſément quand on ſait les élémens, & ces proprietez connues, donnent les moyens de trouver des Equations.

17 Ce qu'on a vu dans le troiſieme Livre touchant les Puiſſances, eſt auſſi une ſource de differentes Equations: car ſi je ſai que $a+b=x$, donc $aa+2ab+bb=xx$ †. Si x eſt l'hypothenuſe d'un triangle, & que les deux côtez ſoient a & b, alors $aa+bb=xx$; partant $xx-aa=bb$, ou $xx-bb=aa$.

18 On peut exprimer differemment les mêmes grandeurs, marquant les parties pour le tout, ou le tout pour les parties; ou les puiſſances pour les racines, ou les racines pour les puiſſan-

* *L.* 4. *n.* 79. † *L.* 3. *n.* 20.

ſances; car ſi $a + b = x$, donc *$aa + 2ab + bb = xx$; ou $aa + 2ab = xx - bb$, ou $aa + bb = xx - 2ab$. Il eſt évident qu'on peut trouver une infinité d'Equations en cette maniere:

Si $ab = xx$; donc $\sqrt{ab} = x$.

Ainſi en ajoutant, retranchant, multipliant, 19
diviſant, on trouve le moyen d'égaler des grandeurs, d'en trouver de doubles expreſſions ou Equations, en quoi conſiſte principalement l'art de cette méthode que nous enſeignons ici, & qui ſe nomme Analyſe, c'eſt-à-dire, méthode de *réſolution*, parce qu'on taille ou coupe, pour ainſi dire, la grandeur qu'on cherche: on lui ajoute, on lui retranche, on la multiplie, on la diviſe, on la réſout, juſqu'à ce qu'elle ſe trouve préciſément égale à une grandeur connue, après quoi elle n'eſt plus inconnue.

Chapitre V.

Il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de 20
lignes inconnues, & réduire toutes ces Equations à une ſeule.

Ce qu'on cherche dans une Queſtion, dans un Problême, & généralement lorſqu'on veut connoitre ce qu'on ne connoit pas encore; c'eſt de ramener, pour ainſi dire, l'inconnu à ce qui eſt connu: comparer l'un avec l'autre, & remarquer leur difference, c'eſt-à-dire, ce qui fait que l'un eſt plus grand que l'autre; & qu'ainſi on découvre ce qu'il faut leur ajouter, ou en retrancher, pour les égaler; ce qu'on connoit

* *L.* 3. *n.* 20.

noit auſſi quand on ſait préciſément quelle eſt leur raiſon: car ſi x eſt le tiers de a, donc $x = \frac{a}{3}$. Si c'eſt a qui eſt le tiers de x, donc $3a = x$.

21 On peut de cette maniere trouver les doubles expreſſions de toutes les grandeurs, dont il eſt parlé dans le Problême, c'eſt-à-dire, trouver des Equations; & il en faut chercher autant qu'il y a de grandeurs inconnues. Il y a toujours dans un Problême une principale ligne inconnue, qui eſt celle dont dépend la réſolution du Problême: & c'eſt à cette Equation qu'il faut réduire toutes les autres, de ſorte qu'il n'y ait plus qu'une ſeule lettre inconnue; car ſi on ſait que $x + b = z$, ou que $z - b = x$, partant où ſeront ces deux inconnues je pourrai toujours ſubſtituer $x + b$ en la place de z, ou $z - b$ en la place de x, & par conſéquent réduire la Queſtion à des termes où il n'y ait qu'une ſeule inconnue. Il y a differentes méthodes. Quand on connoit que l'inconnue eſt le troiſieme ou le quatrieme terme d'une proportion, on la peut exprimer avec les lettres des grandeurs connues; car ſi $\div a. b. x$; donc $\frac{bb}{a} = x$ *. Si $a. b :: c. x$; donc $\frac{bc}{a} = x$. Les termes d'une progreſſion ſe peuvent exprimer de maniere, qu'on n'employe que la même lettre. Si j'avois cette progreſſion de quatre termes exprimés par quatre differentes lettres $\div b. z. x. y$, je les pourrois réduire d'une maniere qu'il n'y eût qu'une lettre inconnue; car ſuppoſant que b eſt égal à 1, je pourrois dire que $\div 1. z. zz. zzz.$ 1°. † b ou 1 eſt à x, comme le quarré de b ou 1 eſt à celui de z; c'eſt-à-dire, $b. x :: bb. zz$, ou $1. x :: 1. zz$; ainſi puiſque zz

* *L.* 3. *n.* 60. † *L.* 3. *n.* 70.

$zz = x$, je puis ſubſtituer zz à la place de x. De même b ou 1 eſt à y, comme bbb ou 1 eſt à zzz *. Donc puiſque $zzz = y$, au lieu de y je place zzz; ainſi je réduis ces quatre grandeurs b, z, x, y à celles-ci, $1, z, zz, zzz$. Il y a une infinité de manieres ſemblables. Ce ſont des méthodes, chacun en peut trouver de plus heureuſes; ce qui lui donne lieu de réſoudre facilement des Problêmes, qui ſont très-difficiles à ceux qui ne connoiſſent pas la méthode; car tout le ſecret conſiſte à rendre les Equations nettes & ſimples.

CHAPITRE VI.

Il faut réduire les termes d'une Equation à l'expreſſion la plus ſimple, & faire enſorte que la grandeur inconnue ſe trouve ſeule dans l'un des membres de l'Equation. 22

LOrſqu'on a fait enſorte que la grandeur inconnue ſe trouve dans un des membres de l'Equation, c'eſt-à-dire, d'un côté du ſigne de l'égalité, & que de l'autre côté il n'y a que des grandeurs connues; la grandeur inconnue ſe trouve préciſément égale à des grandeurs connues, la Queſtion eſt entierement réſolue. Si $x = a + b$, l'on ne peut ignorer la valeur de x. Or pour arriver là, il faut faire paſſer d'un côté ce qui eſt connu, & le délivrer de ce qui eſt inconnu. Avant toutes choſes, on doit réduire les Equations à des expreſſions ſimples. Ces réductions ſe font par l'Addition, ou par la Souſtraction, ou par la Multiplication, ou par la Diviſion, ou enfin par l'Extraction des racines.

Le

* *L.* 3. *n.* 87.

Le principe de tout cela, c'eſt qu'ajoutant aux deux membres d'une Equation, ou retranchant également, l'Equation où l'égalité demeure; comme auſſi multipliant ou diviſant ces deux membres par une même grandeur, ils demeurent égaux, comme on l'a prouvé *. Puiſque deux puiſſances égales ont des raiſons égales, il eſt clair qu'en prenant les racines de deux membres, leur égalité doit ſubſiſter.

23 On a fait voir l'utilité des réductions dans les Elémens de Mathématiques. Voyons-en ici quelques exemples. Si $x - 5 = 15$, ajoutant 5 de part & d'autre, viendra cette Equation plus ſimple $x = 20$. Si au contraire $x + 5 = 20$, en retranchant 5 de part & d'autre, on aura $x = 15$. Si $z - a = b - a$, ajoutant a de part & d'autre, vient $z = b$. De même, ſi $z + a = b + a$, retranchant a de part & d'autre, vient $z = b$. Si on a cette Equation $\frac{x}{3} = b$, multipliant l'un & l'autre membre par 3, vient $z = 3b$. Comme au contraire, ſi on avoit $bx = 3b$, diviſant l'un & l'autre membre par b, on auroit $x = 3$. Si $xx = 25$, en prenant la racine quarrée, viendra $x = 5$. Au contraire, ſi on avoit $\sqrt{z} = 5$, c'eſt-à-dire, ſi la racine quarrée de z eſt égale à 5, en élevant ces deux membres à une même puiſſance, ou en prenant leur quarré, on a cette Equation $z = 25$. Si on avoit $xx = ab$, on pourroit mettre $x = \sqrt{ab}$.

24 Ce Théorême, que le quarré de l'hypothenuſe eſt égale aux quarrez des deux autres côtez, donne le moyen de réduire une Equation à une expreſſion plus ſimple: Car par exemple, ayant cette expreſſion $aa - bb$, & voulant trou-

* *L.* 3. *n.* 54. & 55.

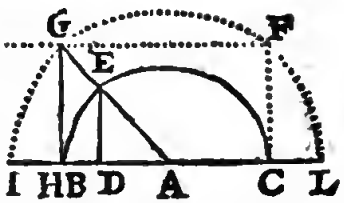
trouver un quarré égal à $aa-bb$, je n'ai qu'à prendre la moitié de a, & du milieu ou de cette moitié, comme rayon, faire un cercle; ou ayant pris une corde égale à b, menant de ſon extrêmité une ligne à l'autre extrêmité de a, qui eſt le diametre du cercle, j'ai un triangle rectangle dont a eſt l'hypothenuſe, & b un des côtez: je nomme c le troiſieme qui eſt connu; donc $aa=cc+bb$: ôtant bb de part & d'autre, vient $aa-bb=cc$; ainſi je puis mettre cc en la place de $aa-bb$, & par conſéquent avoir une expreſſion plus ſimple. Ainſi ſi j'avois $cc+bb$, joignant enſemble c & b de maniere que ces deux lignes fiſſent un angle droit, & achevant le triangle, le troiſieme côté ſeroit l'hypothenuſe contenue. Cette hypothenuſe ayant donc été nommée a, il eſt évident que $aa=cc+bb$. Au lieu de $cc+bb$, je puis donc ſubſtituer aa, expreſſion plus ſimple.

On peut trouver un quarré égal à un plan donné; pour cela les deux côtez ou racines de ce plan étant b & d, il faut trouver un moyen proportionnel entre b & d*. Soit c moyen proportionnel; alors $bd=cc$ †. Ainſi je puis transformer le plan bd dans le quarré cc, c'eſt-à-dire, mettre l'un pour l'autre. 25

Un quarré étant donné, on peut trouver un autre quarré qui en ſoit telle partie qu'on ſouhaitera, ou la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou le cinquieme, &c. Soit le quarré aa, il en faut trouver un autre qui ſoit le quart de aa. Je prens une ligne au hazard, ſur laquelle je marque cinq parties égales avec la même ouverture du compas. Soit cette ligne BC, dont BD eſt une de ces cinq parties; ainſi DC vaut quatre de ces 26

* L. 4. n. 29. † L. 3. n. 57.

parties. De *A* milieu de *BC*, & de l'intervalle de *AB* ou *AC* je fais un cercle; & ſur *D* j'éleve la perpendiculaire *DE*, qui ſe termine à la circonference de ce cercle. Alors ∴ *BD. DE. DC* [a]. Si *BD* ſe nomme *b*, donc *DC* = 4*b*; & ſi *DE* = *x*, donc ∴ *b. x.* 4*b*; partant *xx* = 4*bb*.



Sur *C* j'éleve *Ct*, une perpendiculaire égale à *a* racine, ou côté du quarré *aa* dont on cherche la quatrieme partie qui ſoit un quarré. Je mene *tG* une parallele à *BC*; & par le point *G*, où elle coupe le rayon *AE* prolongé à l'infini, j'abaiſſe une perpendiculaire ſur *BC* prolongé de part & d'autre à l'infini. Cette perpendiculaire *GH* eſt égale à *CF*, & par conſéquent à *a* [b]. Je fais un cercle de l'intervalle de *AG*, dont le diametre eſt *IL*; il eſt évident que *IH* eſt telle partie de *IL* que *BD* eſt de *BC*; par conſéquent une cinquieme partie: ainſi ſi *IH* ſe nomme *m*, le reſte du diametre *HL* ſera 4*m*. Or ∴ *IH. HG. HL*, ou ∴ *m. a.* 4*m* [c]: donc *aa* = 4*mm* [d]. La ligne *IH* ſera par conſéquent le côté ou racine d'un quarré, quatrieme partie du quarré *a*.

27 Ce ſeul exemple fait comprendre comme on peut trouver un quarré qui ſoit telle partie qu'il ſera requis d'un quarré donné; ce qui eſt très utile pour réduire une Equation à une expreſſion plus ſimple; car dans celle-ci $5bx + nn = 5xx$, en diviſant ces deux membres par 5; & pour cela trouvant le quarré *oo* cinquieme partie de *nn*; je la réduirai à cette expreſſion beaucoup plus ſimple $bx + oo = xx$. On voit ce qu'il faut faire.

Quand il eſt queſtion de trouver un quarré plus

[a] *L.* 4. *n.* 29. [b] *L* 1. *n.* 64. [c] *L.* 4. *n.* 29. [d] *L.* 3. *n.* 57.

plus grand, ou deux fois, ou trois fois, que celui qui eſt propoſé, on voit ce qu'il faut faire.

Il y a une infinité de moyens de réduire les 28
expreſſions compoſées à de plus ſimples & plus nettes: après quoi il ne s'agit plus que de faire évanouïr d'une Equation certaines grandeurs embaraſſantes; ce qui ſe peut, ajoutant cette Equation avec une autre, dans laquelle ſe trouvent ces mêmes grandeurs avec un ſigne contraire, ſelon ce principe, que plus & moins une grandeur, ce n'eſt rien. Ainſi, ſi $x = d - b$ & $z = d + b$; pour faire évanouïr b, j'ajoute ces deux Equations dans une Equation $x + z = 2d$, où b ne paroît plus. Il eſt facile de faire paſſer une grandeur d'un des membres d'une Equation dans l'autre membre; car dans celle-ci $x - b = d$; ajoutant b de part & d'autre, on aura $x = d + b$ où b ſe trouve dans le ſecond membre.

Quoiqu'on ne connoiſſe point les racines 29
d'une Equation, c'eſt-à-dire, les grandeurs de la multiplication deſquelles une Equation eſt faite, on peut les augmenter ou les diminuer ſelon qu'on le juge à propos. Comme ſi $xx = xd + bb$ dont les racines ſont $x + d, b, x$, & qu'on veuille augmenter x de 3, il faut prendre la grandeur y qu'on ſuppoſe égale à $x + 3$. Ainſi $y - 3 = x$. Enſuite par-tout où ſera x mettre $y - 3$; & par-tout où ſe trouvera le quarré ou le cube *&c.* de x, faut mettre le quarré ou cube *&c.* de $y = 3$; après quoi l'Equation $xx = xd + bb$ ſera transformée en celle-ci, $yy - 6y + 9 = yd - 3d + bb$ qui eſt la même. En augmentant ou diminuant une Equation, il faut faire enſorte qu'il y ait des ſignes contraires; & qu'ainſi on puiſſe faire évanouïr les grandeurs dont on veut délivrer une Equation. On en verra des exemples.

CHAPITRE VII.

30 *Les Equations ſont d'une ou de pluſieurs dimenſions ou degrez; & ce ſont des degrez qui diſtinguent les Problêmes.*

SElon que la queſtion eſt propoſée, on fait monter les grandeurs inconnues à un degré plus élevé. Lorſque la grandeur inconnue à laquelle on a réduit les autres n'eſt point multipliée, comme en cette Equation $x = d + c$, on dit que cette Equation eſt ſimple ou d'une dimenſion. Nous avons vu que lorſqu'il y a pluſieurs grandeurs inconnues, on les réduit toutes à une ſeule: Si par exemple on avoit x & z, & qu'on ſût que leur difference fût b; ſi x étoit la plus petite, alors $z - b = x$; ainſi au lieu de z on peut mettre $x + b$. Par conſéquent ſi, ſelon que la queſtion eſt propoſée, on ſavoit que le rectangle de x & de z, ou de x & de $x + b$, eſt égal au quarré de c, on auroit cette Equation $xx + xb = cc$, qu'on réduit en ôtant xb de part & d'autre, à celle-ci $xx = cc - xb$, où x eſt élevé au ſecond degré. S'il y avoit eu trois grandeurs inconnues dans la queſtion, & qu'elles euſſent dû être multipliées les unes par les autres; x à laquelle on auroit réduit toutes les autres, ſeroit montée au troiſieme degré. Ainſi on voit que les Equations ſont d'une ou de pluſieurs dimenſions, ou de pluſieurs degrez. Je ne parlerai pas davantage ici des Equations qui ont plus de deux degrez, parce qu'on ne les peut pas réſoudre avec le compas & la règle, c'eſt-à-dire, en n'employant que le cercle & la ligne droite.

On

On réduit les Equations de deux dimenſions 31
à ces formules $xx = aa - xd$, ou $xx = aa + xd$, & $xx = xd - aa$. Car ſi $xx = ab - xd$, comme ab eſt une grandeur connue, en prenant $ab = cc$*, $xx = cc + xd$. Si $xx = xd + c$, je puis trouver un quarré bb égal à la grandeur c, ainſi que $xx = bb + xd$, je cherche une moyenne proportionnelle entre l'unité, & c, laquelle étant nommée b, il faut que $bb = 1c$, ou $bb = c$; puiſque une grandeur multipliée par l'unité ne devient pas plus grande après cette multiplication, comme on l'a déja dit.

C'eſt une faute conſiderable en cette matiere, 32
de ne pas réduire à un degré inferieur ce qui y peut être réduit. On fait cette faute, lorſqu'entre les grandeurs inconnues d'une queſtion, on ne cherche pas des Equations qui conduiſent à un degré plus ſimple.

C'eſt pour réſoudre quelque Problême qu'on cherche des Equations, & qu'on tâche de les réduire. La nature de l'Equation donne le nom au Problême qu'elle réſout.

Quand dans la réſolution, l'Equation après avoir été réduite, n'a qu'une dimenſion, comme ſi $x = b$ ou $x = \frac{ab}{c}$, cette Equation eſt du premier degré, & le Problême eſt ſimple.

Lorſqu'on trouve une Equation où l'inconnue a deux dimenſions, comme $xx = aa + bb$ qui eſt une Equation du ſecond degré, le Problême eſt nommé *Plan*.

Lorſque l'on trouve une Equation élevée au 33
troiſieme ou quatrieme degré, comme $x^3 = aab$ ou $x^4 = acb$, qui ſont des Equations du troiſie-

* *ſup.* n. 25.

me ou du quatrieme degré, le Problême eſt nommé *Solide.*

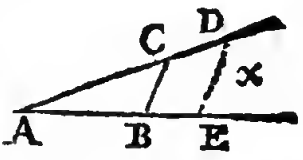
Lorſqu'on vient à une Equation où l'inconnue eſt élevée au delà du quatrieme degré, le Problême étoit nommé *Linéaire* par les Anciens; mais il eſt plus naturel de le nommer par le degré auquel l'inconnue eſt élevée.

CHAPITRE VIII.

34 *De la Conſtruction & Effection géometrique des Equations, c'eſt-à-dire, de la maniere d'exprimer avec des Lignes les Quantitez qui s'y rencontrent.*

ON appelle Conſtruction ou Effection géometrique d'une Equation, les expreſſions qu'on fait en lignes des grandeurs connues & inconnues d'une Equation. La conſtruction des Equations d'un degré eſt facile, puiſqu'il ne s'agit que de faire une ligne égale à une grandeur connue. Comme ſi $x = a$, que a ſoit d'un pied, il eſt facile avec la règle & le compas de tirer une ligne d'un pied. Quand le membre connu d'une Equation auroit pluſieurs grandeurs, comme $a = a + b$, la choſe ſeroit aiſée; car on peut réduire l'Equation à une expreſſion plus ſimple, prenant une grandeur égale à ces deux grandeurs. On peut prendre deux differentes lignes, & les joindre. Quelquefois on ne cherche pas la valeur d'une grandeur, mais celle de ſon quotient, diviſée par d'autres grandeurs; par exemple $x = \frac{ab}{c}$: pour exprimer cela géometriquement, c'eſt-à-dire, conſtruire ou faire une figure qui exprime cette Equation, il faut remarquer que ces lettres marquent des grandeurs pro-

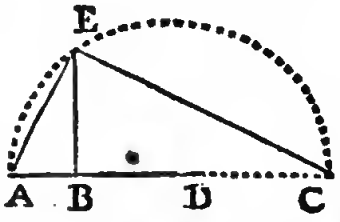
proportionnelles entre elles; car si $c.a :: b.x$, la seconde a étant multipliée par la troisieme b, & leur produit ab divisé par c la premiere, le quotient de la division $\frac{ab}{c}$ sera x la quatrieme proportionnelle; ainsi $x = \frac{ab}{c}$. Pour exprimer cela géometriquement, ayant pris AB égale à c, & AE égal à b, sur B j'éleve BC que je fais égale à a, & de A par C je mene une ligne; ensuite sur E j'éleve une parallele à BC ou à a, que je nomme x. Ces quatre lignes $AB. BC :: AE. x.$ sont proportionnelles; ainsi $\frac{BC \times AE}{AB}$, ou $\frac{ab}{c} = x$.



De même pour exprimer géometriquement 35
$\frac{aa+ab}{c+d} = x$, comme ces grandeurs connues se peuvent réduire à cette proportion $c+d.a+b :: a.\frac{aa+ab}{c+d}$ ou x, la même figure exprime cette Equation; trois lignes étant données on trouve une quatrieme proportionnelle, qui est la valeur de x.

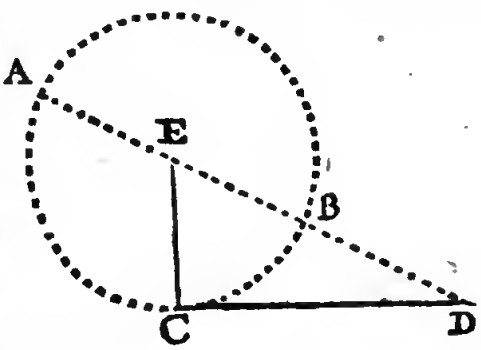
Lorsque les grandeurs connues d'une Equa- 36
tion ont un signe radical, on peut de même l'exprimer géometriquement. Si par exemple, *fig. suiv.* $x = \sqrt{ab}$, en tirant AB une ligne égale à a, & la prolongeant jusques à C, de sorte que $BC = b$, & du milieu de AC comme centre faisant un cercle, la perpendiculaire BE sera la valeur de x; car $\div AB. BE. BC$, ou $\div a.x.c$; ainsi $ab = xx$: donc $ab = x$.

37 On peut auſſi faire la conſtruction de cette Equation $x = \frac{bb}{a-b}$, & l'exprimer en cette maniere. AD étant pris égal à a, & AB à $a-b$; ainſi BD étant égal à b, j'éleve ſur B une perpendiculaire égale à BD ou b, je mene de A à E une ligne droite; & ſur AE au point E une perpendiculaire, ſavoir EC, qui coupe le prolongement de AD: Alors l'angle CEA eſt droit; ainſi ayant décrit un cercle par les trois points A, E, C, il eſt évident que $\div AB.BE.BG$, ou que $\div a-b.b.x$, j'appelle x la valeur de BC. Donc bb. diviſé par $a-b$ eſt égal à x *; ainſi $\frac{bb}{a-b} = x$.



38 La conſtruction des Equations de deux degrez, eſt pareillement facile. Les Equations de deux degrez ou de deux dimenſions ſe réduiſent, comme nous l'avons vu, à ces formules, $xx = ax + bb$, ou $xx = ax - bb$, ou $xx = bb - ax$.

1°. Pour faire la conſtruction de $xx = ax + bb$, ou $xx = bb - ax$; ſur CD une ligne droite, que je ſuppoſe égale à b, j'éleve CE une perpendiculaire que je ſuppoſe égale à la moitié de a, & de l'intervalle de cette moitié, comme rayon, je fais un cercle, & je mene par E ſon centre la ligne DE

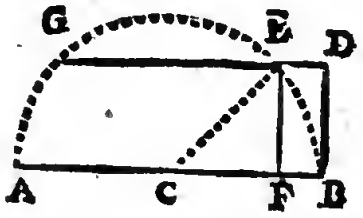


* *L.* 3. *n.* 60.

DE. Puiſque *CE* eſt la moitié de *a*, donc *AB* $= a$. Soit $BD = y$, & $AD = x$. donc $a + y = x$; donc [a] $ax + xy = xx$. Or puiſque *CD* ou *b* eſt une tangente, donc [b] $\div x.b.y$; donc [c] $xy = bb$. Ainſi dans cette Equation $xx = ax + xy$: ſubſtituant *bb* en la place de *xy*, qui eſt la même choſe, on aura cette Equation $xx = ax + bb$ dont on a fait ainſi la conſtruction.

2°. Pour faire la conſtruction de cette Equation $xx = bb - xa$, on fait la même choſe. On ſuppoſe *CD* (*même figure*) égale à *b*, & *CE* égale à la moitié de *a*; mais on ſuppoſe que *BD* eſt égale à *x*. Alors $\div AD$ ou $a + x$. *CD* ou *b*. *BD* ou *x*: donc $ax + xx = bb$. En ôtant de part & d'autre *ax*, viendra $xx = bb - ax$, qui eſt l'Equation dont il falloit former la conſtruction. 39

3°. La conſtruction de cette Equation $xx = ax - bb$, ſe fait ainſi. Soit *AB* égale à *a*, de l'intervalle *BC* moitié de *AB* je fais un cercle; j'éleve ſur *B* la perpendiculaire *BD* égale à *b*; je mene par *D* la ligne *DG* parallele à *AB*. Si cette parallele ne coupe pas le cercle, parce que *b* eſt égale ou plus grande que le rayon du cercle égal à la moitié de *a*, c'eſt une preuve que *xx* n'eſt pas égal à $xx - bb$, puiſque *b* eſt trop grand au regard de *x*. Soit donc *b* plus petit que *BC*; ainſi *DG* coupe le cercle en *E*, par conſéquent *EF* que je ſuppoſe perpendiculaire, eſt égale à *BD* [d]. Je nomme *x* la ligne *AF*, & *y* la ligne *FB*. Il eſt évident [e] que $\div AF$. ou *x*. *FE* ou *b*. *FB* ou *y*. 40



a *L.* 3. *n.* 18. b *L.* 4. *n.* 33. c *L.* 3. *n.* 57.
d *L.* 1. *n.* 65. e *L.* 4. *n.* 29.

Ainſi ∴ $x.b.y$: donc [a] $xy = bb$. Or on a ſuppoſé AF ou x, plus FB ou y égal à a; donc $x + y = a$. En multipliant cette Equation par x, on a cette Equation $xx + xy = ax$: plaçant bb en la place de xy qui eſt la même choſe, comme on vient de voir, on a $xx + bb = ax$; & retranchant bb de part & d'autre, on aura $xx = ax - bb$. Ainſi on a fait la conſtruction de cette Equation.

41 Par le moyen de cette conſtruction on trouve en ligne la valeur de la grandeur inconnue; ce qui ſe trouve encore plus facilement en réduiſant dans une progreſſion de trois termes, les trois formules précédentes. 1°. Cette Equation $xx = ax + bb$ ſe réduit à cette progreſſion ∴ $x - a.b.x$; car $xx - ax = bb$ [b]: ajoutant ax de part & d'autre, on a l'Equation dont il s'agit, $xx = ax + bb$.

42 2°. Cette Equation $xx = ax - bb$ ſe réduit à cette progreſſion ∴ $x.b.a - x$. Car $ax - xx = bb$ [c], ajoutant xx de part & d'autre, on a $ax = bb + xx$; ôtant bb de part & d'autre, on a $ax - bb = xx$; qui eſt l'Equation dont il eſt queſtion.

43 3°. Cette Equation $xx = bb - ax$, ſe réduit à cette progreſſion ∴ $x + a.b.x$; car $xx + ax = bb$ [d]: ôtant de part & d'autre ax, on a cette Equation $xx = bb - ax$ dont il s'agiſſoit.

Dans ces trois progreſſions, b le terme moyen eſt connu; & dans la premiere & dans la troiſieme, on connoit la difference des extrêmes qui eſt dans la premiere $- a$, & dans la troiſieme $+ a$. Dans la ſeconde, on connoit la ſomme des deux extrêmes. Avec cela, comme on le va voir dans les trois Problêmes ſuivans, on peut connoitre tous les termes de ces progreſſions.

PRO-

a *L.3.n.57.* b *L.3.n.58.* c *L.3.n.57.* d *L.3.n.57.*

PROBLEME. I.

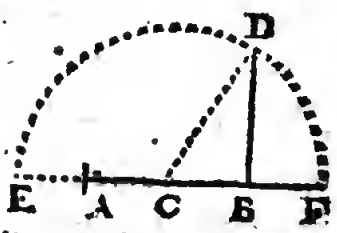
Soit cette progreſſion de trois lignes ∴ z. b. x. 44
On connoit la moyenne b, *& que* a *eſt égal à la ſomme de* x *&* z *de* z *les extrêmes. Connoitre les extrêmes.*

Je prens *AB* égal à *a*, ſomme des extrêmes. De *C*, milieu de *AB* comme centre, & de l'intervalle *AC* ou *CB*, je fais un cercle. Sur *B* j'éleve perpendiculairement *BD* égale à la moyenne *b*; & par le ſommet *D* je mene *DG* (*même figure que ci-deſſus*) parallele à *AB*, & de *E* où *DG* coupe le cercle, j'abaiſſe *FE* une perpendiculaire ſur *AB*, qui eſt égale à *BD*, ainſi *EF* = *b*; donc puiſque ∴ *AF. EF. FB.* les extrêmes ſeront *AF* & *FB*; ainſi ſi *z* eſt le grand extrême, *FB* qui eſt le petit extrême, ſera égal à *x*.

PROBLEME II.

Soit cette progreſſion de trois lignes ∴ x + d. b. x, *ou* ∴ x − d. b. x, *la moyenne* b *eſt connue, & la difference des extrêmes* x + d *&* x. *Connoitre la valeur de* x. 45

Je fais *AB* égale à *d*; & ſur *B* j'éleve perpendiculairement *BD* égale à *b*; enſuite de *C* moitié de *AB*, & de l'intervalle *CD*, je fais un cercle. Je prolonge *AB* de part & d'autre juſqu'à la circonference du cercle, après quoi *AE* ou *BF* = *x*, car ∴ *x* + *d. b. x.*



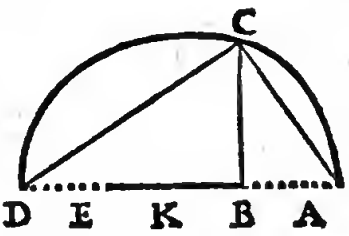
Si la progreſſion eſt ∴ *x* − *d. b. x*, il faut faire la même choſe, mais en ce cas où *x* = *EB*, le plus petit terme eſt *BF* égal à *EB* − *AB*,

ou à $x - d$. Il eſt évident que la difference de $x - d$. & de x eſt d. Quand le ſigne eſt $+$, la grandeur x eſt EA, à laquelle on ajoute la difference d, pour avoir le plus grand extrême. Quand le ſigne eſt $-$, on retranche d de EB ou FA qui eſt la valeur de x.

PROBLEME III.

46 *Soit cette progreſſion de trois lignes* ∴ d + x. b. d, *la moyenne* b *étant connue, connoitre la difference des extrêmes* d + x *&* d, *laquelle eſt* x.

Sur B extrêmité de AB égale à d, j'éleve perpendiculairement BC égale à b; par A & C je mene une ligne droite ſur laquelle au point C je fais une perpendiculaire qui eſt CD; ainſi l'angle ACD eſt droit. Je prolonge AB juſqu'à ce qu'elle coupe CD; la ligne BD, après en avoir ôté AB, ſera égale à x; car ayant coupé AD par la moitié au point K, & de l'intervalle AK ou KD fait un cercle, ce cercle paſſera par C; ainſi ∴ AB ou d. BC ou b. BD: partant $BD = d + x$ qui eſt le troiſieme terme: ayant donc retranché de BD la ligne DE égale à AB, le reſte ſera égal x dont on cherchoit la valeur.



CHA-

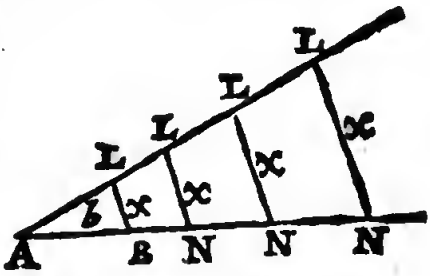
CHAPITRE IX.

De la Conſtruction ou Effection géometrique, qui eſt un Lieu. Qu'eſt-ce que ce Lieu? Quand eſt-ce qu'un Problême eſt un Lieu? Diſtinction des Problêmes ſelon cette conſideration. 47

DAns les Conſtructions ou Effections géometriques des Equations on cherche ordinairement une ligne droite ou courbe, ou une ſuperficie, dont tous les points ayent un même rapport aux points d'une même ligne droite à l'égard de l'un de ſes points. Une ligne droite, une ligne courbe, une ſuperficie, ne ſont pas diſtinguées des points, par leſquels elles paſſent; ainſi par un Lieu géometrique il faut entendre le paſſage, ou les points, par leſquels paſſe la grandeur qu'on cherche. Une Conſtruction ou Effection géometrique eſt donc un Lieu, ſi ce n'eſt pas ſeulement un point qu'on propoſe de trouver, mais une ſuite de pluſieurs points, qui comparez avec un certain point & une certaine ligne droite, ayent entre eux les mêmes rapports. Et alors l'Equation, qui exprime ces rapports, s'appelle un Lieu; & le Problême qu'on entreprend de réſoudre, eſt auſſi un Lieu. Il y a pluſieurs ſortes de lignes; il y a auſſi pluſieurs ſortes de lieux, des cercles, des lignes droites & courbes de differentes eſpeces. On dit ainſi d'un Problême, qui eſt un Lieu, que c'eſt ou à la ligne droite, ou au cercle, ou à quelque eſpece de ligne courbe.

Les Problêmes, qui ſont indéterminez, ſont des Lieux; car ils peuvent avoir pluſieurs diffe- 48

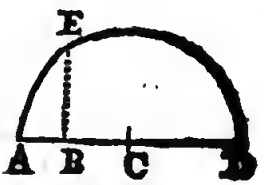
rentes réſolutions. Voyons-en des exemples; & comme toutes les réſolutions s'expriment par une ſeule Equation, commençons par un lieu qui ſoit une ligne. La ligne LL en ſera un, ſi l'on peut mener de tous les points les lignes LN, LN, paralleles, qui rencontrent une ligne droite AN; & ayant pris ſur la ligne AN un point A à volonté, chaque ligne LN a un même rapport à la partie AN, qu'elle fait par ſa rencontre. Par exemple, ſi la ligne LL eſt droite, & qu'elle rencontre la ligne droite AN en A, il eſt évident que chaque ligne droite LN a un même rapport à chaque partie AN; ce qui ſe peut exprimer par cette Equation $y = \frac{bx}{a}$. ſi je ſuppoſe que le rapport propoſé eſt comme de a à b, & que les lignes indéterminées ſoient $LL = x$, & $NN = y$: car puiſque $a.\ b :: x.\ y$; donc le produit de b par x, qui eſt bx diviſé par a, ſera la valeur de y; ainſi $y = \frac{bx}{x}$. Cette Equation marque que ce lieu eſt une ligne; car il n'y a qu'elle qui ait cette proprieté, que toutes les lignes qu'on tirera de AL ſur AN, ſeront toutes à AN comme a eſt à b; ainſi vous voyez que le Problême où il s'agit de trouver LL, eſt un lieu; qu'ainſi ce Problême eſt indéterminé, étant capable de differentes réſolutions; & ce lieu ne peut être qu'une ligne droite: car il n'y a que celle dont LL occupe la place, qui ait les proprietez de la ligne droite.



Un

Un Problême eſt un lieu à un cercle, & il eſt indéterminé, quand on propoſe de trouver une ligne dont le quarré ſoit égal à un plan ; car alors il faut de néceſſité ſuppoſer des grandeurs connues, comme par exemple, que les côtez du plan ſont a & b; que $AB = a$, & $BD = b$. $AD = a + b$, & $AC = CD$. 49

Sur C comme centre je fais un cercle, & ſur B la perpendiculaire BE, alors $\div\div AB. BE. BD$; donc $ab = \overline{BE}^2$; ainſi ſi $BE = x$, donc $ab = xx$ ou $\frac{ab}{x} = x$. Ce



Problême eſt indéterminé : car quelque raiſon que je ſuppoſe entre les parties de AD, le quarré de la ligne qui tombera perpendiculairement entre les deux points A & D, aura toujours ſon quarré égal au plan des parties de AD, c'eſt-à-dire, que $ab = xx$, ou $\frac{ab}{x} = x$. Ce Problême peut donc avoir une infinité de réſolutions. Vous voyez que pour trouver une Equation, il a fallu ſuppoſer des lignes connues AB & BD, autrement on ne l'auroit pu finir.

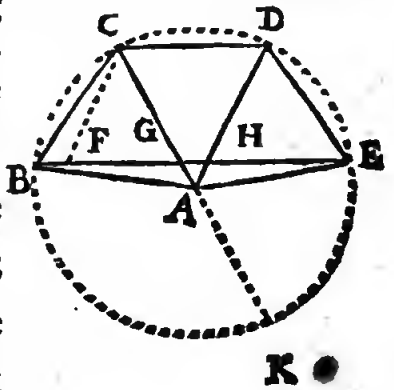
Il n'y a que le cercle, qui dans toutes ſes parties ait toujours cette Equation.

C'eſt ainſi que par les Equations on connoit la nature de toute ligne droite & courbe, pourvu qu'elle ſe puiſſe faire par un mouvement réguliér & uniforme. C'eſt à connoitre la nature des lignes courbes, que ſert la doctrine des lieux; ainſi c'eſt une matiere qui ne nous regarde pas.

CHAPITRE X.

5° *On ne peut exprimer géometriquement avec la règle & le compas, que les Equations ſimples, ou qui ne ſont que de deux degrez; on ne peut donc pas avec la connoiſſance de ces Elémens, réſoudre les Problêmes ſolides.*

ON vient de voir comment on peut réſoudre avec le compas & la règle, c'eſt-à-dire, en tirant des lignes droites & faiſant des cercles, les Equations qui ſont d'un ou de deux degrez. Cela ne ſe peut pas, quand elles en ont davantage. Voyons-le dans un exemple. Le Problême de la triſection de l'angle eſt fameux. Un arc de cercle étant donné, on propoſe de le couper en trois parties égales, & par conſéquent trouver une troiſieme partie de l'angle propoſé, dont la troiſieme portion de cet arc ſoit la meſure. La corde BE de l'arc $BCDE$ eſt connue. On propoſe de couper cet arc en trois parties égales. Selon les règles de la méthode, je ſuppoſe la choſe faite, c'eſt-à-dire, que $BC=CD=DE$; je mene CF parallele à DH; ainſi $CF=DH$: & puiſque $CG=DH$, partant $CF=CG$; ainſi le triangle FCG eſt un iſoſcele. Les angles BCG & BGC ſont égaux; car la meſure de BCG eſt la moitié de l'arc BK, & celle de BGC eſt la moi-



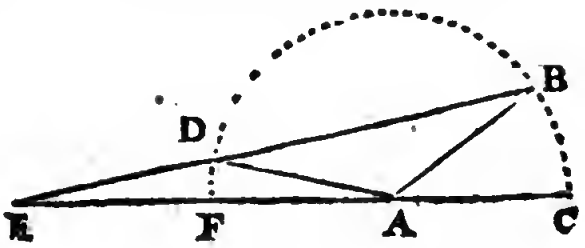
moitié de KE, plus la moitié de BC ou de DE égal à BC [a]. Or BK eſt égal à KD; donc ces deux angles qui ont même meſure ſont égaux: partant le triangle CBG eſt iſoſcele. Il a un angle commun avec FCG; ces deux iſoſceles ſont donc ſemblables. BAC eſt auſſi iſoſcele, & il a un angle commun avec CBG, ſavoir BCG; ces trois triangles ſont donc ſemblables [b].

Ces trois triangles BAC, CBG, FCG étant ſemblables, il faut que $\div\div AB.BC.CG.GF$ [c], donc ſi $AB=1$ & $BC=z$, ſelon ce qui a été dit ci-deſſus [d], $\div\div 1.z.zz.zzz$; donc $FG=zzz$. Je nomme b la ligne connue BE; or $CD=FH=BC=BG=HE$; donc $BG+FG+GH+HE$ eſt le triple de BC; ainſi il ne s'en faut que la valeur de FG que BE, ou b ne ſoit triple de BC. Or $FG=zzz$, donc $b+zzz=3z$, ou $zzz=3z-b$.

Voilà juſqu'où nous pouvons pouſſer ici ce Problême, mais vous voyez que nous n'avons rien dans les Elémens précédens dont on puiſſe tirer un moyen pour connoître la grandeur inconnue z, ſachant ſeulement que ſon cube zzz, eſt égal à trois fois elle-même, c'eſt-à-dire, à $3z$, après en avoir retranché la grandeur connue b.

Ce Problême ſe réſout aiſément par des voyes méchaniques. Soit l'arc BC, meſure de l'angle BAC, qu'il faut couper en trois. Je prolonge vers E le diametre CF, & appliquant une règle ſur B, & ſur le prolongement de CF, je cherche le point D dans le cercle tel que la ligne AD ſoit égale à DE; l'ayant trouvé en tâ- 51

a *L.* 2. *n.* 39. & 52. b *L.* 2. *n.* 83. & *L.* 4. *n.* 8.
c *L.* 4. *n.* 10. d *ſup. n.* 21.



tâtonnant, je dis que l'arc *DF* ſera le tiers de *BC*, ou que *DAF* eſt le tiers de *BAC*; ce que je démontre.

ADE & *DAB* ſont iſoſceles: donc *DBA* = *BDA*, & *DAE* = *DEA*: l'angle *BDA* exterieur, eſt égal aux deux interieurs *DEA* & *DAE*; donc *DBA* eſt égal à ces deux mêmes angles, & par conſéquent il eſt double de l'un & de l'autre. L'angle *BAC* exterieur eſt auſſi égal aux deux interieurs *DEA* (ou ſon égal *DAF*) & à *DBA*, partant il eſt triple de *DAF* moitié de *DBA*; ce qu'il falloit démontrer.

J'aurois pu ajouter pluſieurs choſes touchant les Equations; mais ce que j'ai dit ſuffit, car pour faire uſage de ce qu'on en peut dire de plus, il faut avoir étudié les Elémens des lignes courbes.

CHAPITRE XI.

52 *Eſſais de la méthode ſur quelques Problêmes.*

ON peut tenter la réſolution d'un Problême par deux voyes. La premiere n'eſt qu'une application des Elémens, qui font découvrir quelque moyen particulier au Problême dont il s'agit, & qui ne peut pas ſervir dans

un

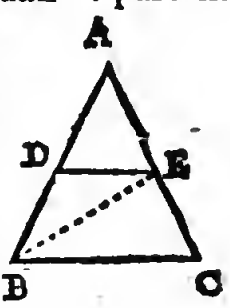
un autre. La ſeconde voye eſt l'ordre que preſcrit la méthode que nous enſeignons ici, ſelon laquelle on trouve ce que l'on cherche d'une maniere d'autant plus excellente, qu'elle s'étend généralement à tout Problême. Donnons un exemple de ces deux voyes.

Probleme I.

BAC eſt un iſoſcele. On propoſe de couper 53
ſes côtez *AB*, *AC* par une parallele à la baſe *BC*; de ſorte que cette parallele ſoit égale à ce qui reſte des côtez, c'eſt-à-dire, (je ſuppoſe la choſe faite) que $DB = DE$.

Premiere maniere.

Je ſuppoſe la choſe faite, ſavoir que $BD = DE$, donc le triangle *BDE* eſt iſoſcele; ainſi les angles *DBE*, & *DEB* ſont égaux. Or les angles *CBE* & *EBD* ſont auſſi égaux*: partant *EBC* & *EBD* ſont égaux; partant la ligne *BE* coupe par la moitié l'angle *DBC*. D'où je connois que dans un triangle iſoſcele, tel que *BAC*, en diviſant en deux l'angle *ABC* par une ligne droite *BE*, & menant par *E* une parallele à *BC*, elle ſera égale à *DB*; ainſi par cette proprieté du triangle iſoſcele je trouve le moyen de réſoudre le Problême propoſé; mais, comme vous voyez, ce moyen eſt particulier & propre à ce ſeul Problême.



Seconde maniere.

Suppoſant la choſe faite, je nomme *a* la ligne 54
AB qui eſt connue, & *d* la baſe *BC* auſſi connue, & *x* la grandeur inconnue *AE* que l'on cherche; ainſi

* *L. 2. n. 25.*

ainſi comme $EC = a - x$, auſſi $DE = a - x$, il eſt évident que $a.d :: x.a - x$, donc $aa - ax = dx$. J'ajoute de part & d'autre ax, & il vient $aa = dx + ax$; je ſuppoſe $c = d + a$, ainſi $cx = dx + ax$; & par conſéquent au-lieu de $dx + ax$, mettant cx, j'ai $aa = cx$; donc $\div c.a.x$: ainſi il ne s'agit que de trouver une troiſieme proportionnelle aux deux lignes connues c & a; ce qu'on a enſeigné *. Cette ſeconde maniere analytique eſt générale, & n'eſt point particuliere à ce Problême.

Probleme II.

55 *Connoitre chaque côté du triangle* ABC, *connoiſſant la ſomme de chacun de deux de ſes côtez.*

Soit $AB = x$, & $AB + BC = a$, & $AB + AC = b$, & $BC + AC = c$; alors $BC = a - x$, & $AC = b - x$. Or $AC + BC = c$; donc $a - x + b - x$, ou $a + b - 2x = c$. Donc ajoutant $2x$ de part & d'autre, on aura $a + b = c + 2x$. Otant c de part & d'autre, on aura $a + b - c = 2x$.

Ainſi pour trouver la valeur de x, il faut joindre les deux lignes a & b, retrancher du tout la ligne c; la moitié de ce qui reſte ſera la valeur de x.

Probleme III.

56 a *eſt un des côtez d'un triangle rectangle*, x *eſt l'autre côté, dont la difference avec l'hypothenuſe eſt* b. *Trouver la valeur de* b.

L'hypothenuſe eſt $x + b$; Donc $aa + xx = x + 2bx + bb$ †. Otant xx de part & d'autre; $aa = 2bx + bb$; retranchant encore bb, on aura $aa - bb = 2bx$; prenant $cc = aa - bb$ ‡, on au-

* *L.* 4. *n.* 23. † *L.* 4. *n.* 71. ‡ *ſup. n.* 24.

aura $cc = 2bx$. Donc $\div\div 2b.c.x$. Il ne s'agit donc que de trouver une troiſieme proportionnelle aux deux grandeurs connues $2b$ & c.

Probleme IV.

a *eſt l'hypothenuſe d'un triangle rectangle, & b la difference des deux côtez. Trouver ces côtez.* 57

Soit nommé x le plus petit côté : donc le plus grand eſt $x+b$: ainſi $aa = 2xx + 2xb + bb$. Je retranche $bb =$ de part & d'autre, & j'ai $aa - bb = 2xx + 2xb$, ou $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = xx + xb$. Je mets en la place de $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$, le quarré cc que je lui trouve égal [a]. J'ai donc $cc = xx + bx$, ou $cc - bx = xx$; ainſi $\div\div x + b.c.x$. On trouvera donc la valeur de x [b].

Probleme V.

a *eſt l'hypothenuſe d'un triangle rectangle, & b la ſomme des deux côtez. Trouver ces côtez.* 58

Soit nommé x un de ces côtez ; donc l'autre ſera $b-x$: ainſi $aa = bb - 2bx + 2xx$. J'ajoute $2bx$, ainſi $2bx + aa = bb + 2xx$. Je retranche encore bb, & j'ai $2bx + aa - bb = 2xx$. Je mets dd en la place de $aa - bb$, que j'ai trouvé égal [c] : donc $2bx + dd = 2xx$. Je diviſe le tout par 2, pour cela je cherche cc égal à la moitié de dd [d] ; ainſi $bx + cc = xx$: donc $\div\div x.c.x - b$. Je puis donc trouver la valeur de x [e].

Probleme VI.

aa *eſt l'aire ou ſuperficie d'un parallelogramme rectangle,* x *ſon petit côté, &* x+b *le plus grand. On cherche ces deux côtez.* 59

Le produit de x par $x + b$ eſt l'aire de ce pa-

a *ſup. n.* 24. b *ſup. n.* 38. & 43. c *ſup. n.* 24.
d *ſup. n.* 26. e *ſup. n.* 38. & 4.

parallelogramme; donc $xx + xb = aa$; ainſi $\div x. a. x + b$. Ce Problême ſe réſout par conſéquent comme le précédent.

PROBLEME VII.

60 x *eſt le plus grand côté d'un triangle rectangle: ſa difference avec l'hypothenuſe eſt* a, *qui eſt ainſi* x + a. *La difference de cette hypothenuſe avec l'autre côté, qui eſt plus petite qu'elle, eſt* b; *ainſi ce côté eſt* x + a − b. *On cherche ces trois côtez.*

Les quarrez des deux côtez x & $x + a - b$ ſont égaux à celui de l'hypothenuſe, laquelle eſt $x + a$; ainſi $2xx + 2ax - 2bx - 2ba + aa + bb = xx + 2ax + aa$. J'ajoute de part & d'autre $2ba$, & j'ai $2xx + 2ax - 2bx + aa + bb = xx + 2ax + aa + 2ba$. Je retranche de part & d'autre $xx + 2ax + aa$; & j'ai $xx - 2bx + bb = 2ba$. Je retranche $+ bb$, & j'ai $xx - 2bx = 2ba - bb$: prenant d égal à $2b$ & cc égal à $2ba - bb$, j'ai $xx - dx = cc$; ainſi $\div x. c. x - d$. Ce qui ſe réſout aiſément *.

PROBLEME VIII.

61 b *eſt la perpendiculaire tirée de l'angle droit ſur l'hypothenuſe d'un triangle rectangle:* a *eſt la difference des deux parties ou ſegmens de l'hypothenuſe. Trouver ces ſegmens.*

Soit x le plus petit ſegment; donc le plus grand ſera $x + a$. Or $\div x + a. b. x$ †. Donc ce Problême ſe réſout comme on l'a enſeigné ‡.

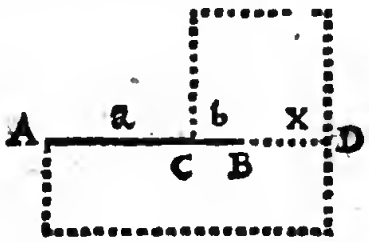
PROBLEME IX.

62 *La ligne* AB *eſt coupée dans un de ſes points, comme* C; *on propoſe de la prolonger juſqu'à* D,

* *ſup. n.* 38. & 41. † *L.* 4. *n.* 28. ‡ *ſup. n.* 38. & 43.

D, *de ſorte que le rectangle fait de* AD *&* *de* BD *ſoit égal au quarré de* CD.

Je ſuppoſe la choſe faite. Soit $AC = a$, & $CB = b$, & $BD = x$. Il eſt queſtion de trouver la valeur de BD, ou de x. Je multiplie AD ou $a + b + x$ par BD, c'eſt-à-dire, par x, ce qui fait $ax + bx + xx$, lequel produit ſelon la queſtion eſt égal au produit de CD ou de $b + x$ multiplié par lui-même; c'eſt-à-dire, que $ax + bx + xx = bb + 2bx + xx$. J'ôte des deux membres de cette Equation $bx + xx$, & il reſte $ax = bb + bx$; je fais paſſer bx de l'autre côté, afin que la grandeur connue bb reſte toute ſeule, & j'ai $ax - bx = bb$. Pour réduire cette Equation aux plus ſimples termes, je la diviſe par $a - b$, & alors $x = \frac{bb}{a-b}$ laquelle Equation ſe réſout dans cette progreſſion $\div a - b. b. x$, dont les deux premiers termes étant connus, le troiſieme que je cherchois, qui eſt x, me ſera auſſi connu; ainſi pour faire le Problême il faut prolonger la ligne AB de la grandeur x qu'on vient de connoître.



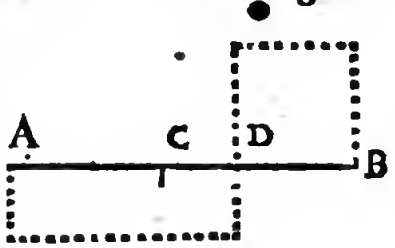
La réſolution de chaque Problême, donne la connoiſſance d'un nouveau Théorême: Car ſelon ce qui vient d'être prouvé, le quarré de BD, *prolongement d'une ligne, plus* CB *partie de cette ligne, eſt égal au rectangle fait de* AD *&* *de* BD; *& ce prolongement eſt le troiſieme terme d'une progreſſion, dont* AC — BC *eſt le premier terme, &* BC *le ſecond. La plus grande par-*

partie des Théorêmes ſont les fruits de l'Analyſe, qui, comme vous voyez, eſt une ſource féconde de véritez.

PROBLEME X.

63 *La ligne* AB *eſt coupée en* C. *On propoſe de la couper derechef en* D; *de ſorte que le rectangle de* AC + DC *par* CD, *ſoit égal au quarré de* DB.

Je ſuppoſe la choſe faite. Il faut trouver la valeur de CD. Soit $AC = a$, & $CB = b$, & $CD = x$; ainſi $DB = b - x$. Le rectangle de AD par CD eſt $ax + xx$, & le quarré de DB eſt $bb - 2bx + xx$; donc ſelon la queſtion $ax + xx = bb - 2bx + xx$. Je retranche xx de part & d'autre, & $ax = bb - 2bx$. Je fais paſſer $2bx$ de l'autre côté, afin que le connu ſoit ſeul, $ax + 2bx = bb$; je diviſe cette Equation par $a + 2b$, il vient $x = \frac{bb}{a+2b}$; je réduis cette égalité en proportion $\div a + 2b. b. x$, les deux premiers termes ſont connus, donc x le ſera auſſi; ainſi en prenant ſur CB la ligne CD égale à x, on aura fait ce qui étoit requis.



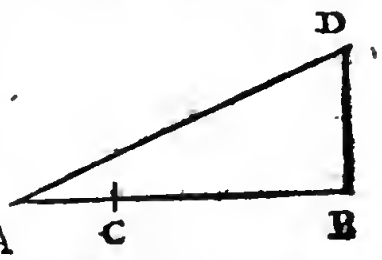
PROBLEME XI.

64 *La ligne droite* AB *eſt coupée en* C, *la ligne* BD *infinie eſt perpendiculaire ſur* AB: *il faut de* A *mener* AD *une ligne ſur* BD, *de ſorte que* AD = BC + BD.

Je ſuppoſe la choſe faite, & que $AB = a$ & $BC = b$, & $BD = x$ valeur que l'on cherche.

Se-

Selon la queſtion $AD = BC + BD$, partant $AD = b + x$. Or puiſque l'angle ABD eſt droit, le quarré de AD ou de $b + x$, lequel quarré eſt $bb + 2bx + xx$, eſt égal à ceux de AB, & de BD, qui ſont aa & xx. Ainſi $bb + 2bx + xx = aa + xx$; ôtant de part & d'autre xx, il vient $bb + 2bx = aa$. Afin que l'inconnu ſoit tout d'un côté, faiſant changer de place à bb, nous aurons $2bx = aa - bb$, que je diviſe par $2b$, & j'ai $x = \frac{aa - bb}{2b}$, laquelle Equation ſe réduit ainſi dans cette proportion $2b. a + b :: a - b. x$, dont les trois premiers termes étans connus, le quatrieme x ſera connu: ce que l'on cherchoit.



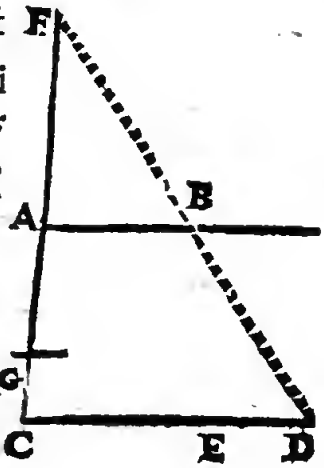
PROBLEME XII.

Deux lignes paralleles AB & CD, *ſont données par poſition avec* CF, *comme auſſi les points* F & E. *On propoſe de mener* FD *coupant* AB & CD *prolongées au beſoin, de ſorte que* AB *ſoit à* ED, *comme* AF *eſt à* AG. 65

Soit $AF = a$, $CF = b$, $CE = c$, $AG = d$, & $AB = x$.

Nous ſuppoſons la choſe faite: partant, ſelon l'hypotheſe $a. d :: x. ED$. Multipliant donc x par d, & diviſant le produit qui eſt dx par a, le quotient $\frac{dx}{a} = ED$. Les deux triangles AFB & FCD ſont ſemblables; $a. x :: b. CD$. Or $CD = CE + ED$, & partant $CD = c + \frac{dx}{a}$. Le produit des extrê-

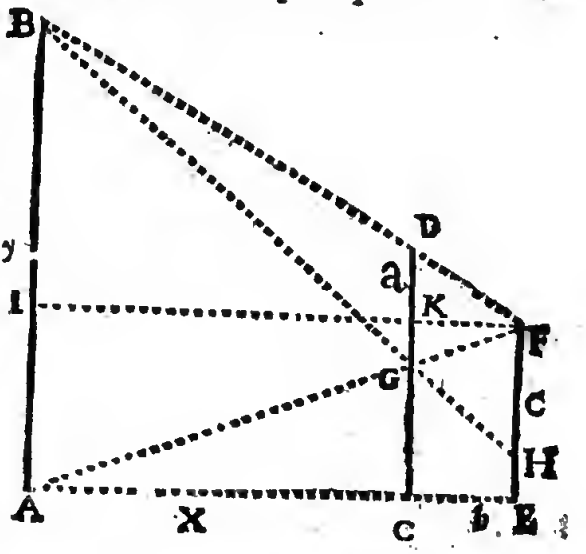
mes a & $c + \frac{dx}{a}$, qui eſt $ac + dx$, eſt égal à celui des moyens : Donc $ac + dx = bx$. Je tranſporte $+ dx$, & vient $ac = bx - dx$. Je diviſe cette Equation par $b - d$, & j'ai $x = \frac{ac}{b-d}$ laquelle Equation ſe réduit en cette proportion $b - d. c :: a. x$, dont les trois premiers termes ſont connus.



Probleme XIII.

66 *Meſurer une hauteur inacceſſible* AB, *& ſa diſtance* AC, *par le moyen de deux bâtons* CD *&* EF.

Je ſuppoſe que $AC = x$, $AB = y$, $CE = b$, $GD = a$, & $FH = c$; alors puiſque les triangles BAF & GDF ſont ſemblables, $AB. GD :: FA. FG$; mais $FA. FG :: FI. FK$, à cauſe des paralleles GD, BA ; donc $AB. GD :: FI. FK$, ou leurs égales AE & CE, ainſi $y. a :: x + b. b$, par conſéquent $y = ax + ab$.



Les

Les deux triangles *BHF* & *BGD* ſont ſemblables; donc comme *BD* eſt à *BF*, ou *IK* à *IF*, ou *AC* à *AE*, de même *GD* eſt à *HF*; ainſi *AC. AE:: GD FH*, ou $x. x+b :: a. c$, partant $xc = ax+ab$; ôtant ax de part & d'autre, il reſte $xc - ax = ab$; diviſant l'un & l'autre membre par $c-a$, on a $x = \frac{ab}{c-a}$; ainſi $c-a\ a :: b. x$. On connoit les trois premiers termes de cette proportion; donc x le quatrieme que l'on cherche ſera auſſi connu.

Puiſque l'on a trouvé ci-deſſus que $by = ax+ab$ & $xc = ax+ab$; il s'enſuit que $by = cx$, étant égaux à la même grandeur $ax+ab$, partant $b. c :: x. y$. Or x eſt déja connu: donc les trois premiers termes étant connus, on connoitra le quatrieme terme y que l'on cherchoit.

PROBLEME XIV.

Deux Marchands ont mis en Societé 12 *livres, & ont gagné* 34 *livres; le premier a pris* 7 *livres, tant pour miſe que pour gain pour deux mois; le ſecond a pris* 39 *livres, tant pour ſa miſe que pour ſon gain pour cinq mois. On demande la miſe & le gain d'un chacun en particulier.* 67

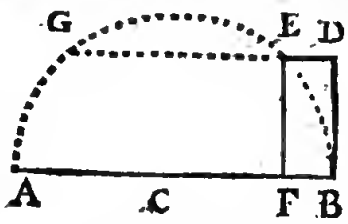
La miſe des deux, $12 = a$. La miſe du premier ſoit x; ainſi celle du ſecond eſt $a-x$.

La miſe & gain du premier eſt $7 = b$: donc $b-x$ ſera le gain du premier.

La miſe & gain du ſecond eſt $39 = c$: donc $c-a+x$ ſera le gain du ſecond.

Or comme la miſe du premier multipliée par ſon tems, eſt à ſon gain; ainſi la miſe du ſecond multipliée par ſon tems, eſt à ſon gain; c'eſt-à-dire, $2x. b-x :: 5a-5x. c-a+x$. Le produit des extrêmes eſt égal à celui de ceux du

milieu; donc $2xc-2ax+2xx=5ab-5ax-5bx+5xx$; & ajoutant de part & d'autre $2ax$ & retranchant en même-tems $2xx$, on aura $2xc=5ab-3ax-5bx+3xx$; j'ajoute de part & d'autre $3ax+5bx$, ce qui me donne $2cx+3ax+5bx=5ab+3xx$. Je suppose que $d=2c+3a+5b$; ainsi $dx=5ab+3xx$; je prens aussi $f=5ab$, que je retranche de part & d'autre, & j'ai $dx-f=3xx$. Ensuite pour réduire cette Equation dans une formule qui me donne la résolution de la question, je suppose $d=3g$ & $f=3b$; ainsi $gx-b=xx$, je trouve un quarré égal à b, que je nomme ll, partant $gx-ll=xx$; laquelle Equation se réduit à cette progression $\div g-x.\ l.\ x$, car $gx-xx=ll$, & par conséquent $gx=ll+xx$, & $gx-ll$, $=xx$. Les extrêmes de cette progression sont $g-x$ & x, dont g est la somme. On trouvera leur difference si sur $AB=g$ ayant décrit le cercle AGB, on éleve perpendiculairement $BD=l$, & l'on tire de DG parallele à AB, & du point E, la perpendiculaire EF qui coupera AB aux pointscherchez. La grandeur inconnue que l'on cherchoit est x. Or comme dans ce Problême on cherche la valeur de x en nombre, il faut du quarré de CE ou CB, moitié de AB, somme des extrêmes connus, ôter le quarré $FE=ll$ aussi connue, il restera le quarré de CF, moitié de la difference des extrêmes, dont la racine ajoutée à CB donnera le plus grand; & en étant ôté, le plus petit $x=3$, mise du premier; après quoi tout le reste est facile.



AVER-

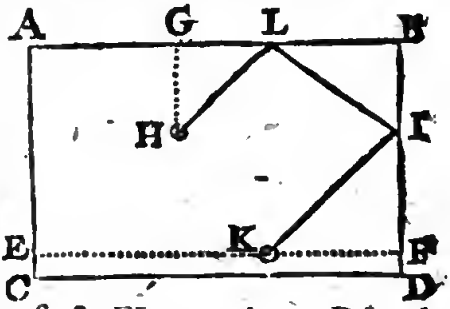
AVERTISSEMENT.

On va voir dans les deux Problêmes ſuivans l'uſage qu'on peut faire de la méthode qu'on vient d'enſeigner pour réſoudre des Problêmes qui ſembleroient ne point appartenir à la Géometrie, dont cependant la réſolution en dépend.

PROBLEME XV.

Soit le Billard ABCD. *Qu'il faille toucher la Bille* H *par deux bricoles, avec la Bille* K. 68

L'angle d'incidence & de réflexion ſont égaux; ſuivant ce principe, on ſuppoſe que *K* pouſſée au point *I* doit réflechir vers *L*, & de *L* à *H*. C'eſt donc ce point *I* qu'on demande. Ayant mené par *K* la ligne *EF*, parallele au côté *CD*; & par l'autre point *H*, la ligne *GH* parallele à *BD*. Soit *KF*=*a*, *FB*=*b*, *BG*=*d*, *GH*=*f*, & *FI*=*x*: donc *BI*=*b*−*x*. Les triangles *KFI* & *IBL* étant ſemblables, *x*. *a*:: *b*−*x*. *BL*. Donc $BL = \frac{ab-ax}{x}$, & en corrigeant cette expreſſion $BL = \frac{ab}{x} - a$. Or *GB* − *BL* = *GL*: ôtant donc $\frac{ab}{x} - a$ de *d*, on aura $GL = d + a - \frac{ab}{x}$.



Les triangles *KFI* & *LGH* ſont ſemblables, donc *a*. *x*:: $d + a - \frac{ab}{x}$. *f*: donc $af = dx + ax - ab$.

$+ax - ab$: donc ajoutant ab de part & d'autre & diviſant par $d + a$, on aura $\frac{af + ab}{d + a} = x$; & remettant cette Equation en proportion, on aura $d + a. f + b :: a. x$, c'eſt-à-dire, que FI eſt une quatrieme proportionnelle à ces trois lignes $BG + KF$, $GH + FI$, & KF; elles ſont connues: partant FI qu'on cherchoit le ſera; ainſi le point I.

Si on voit donc que la Bille K aille par deux bricoles toucher la Bille H, il faut frapper K de maniere qu'elle aille à I, d'où elle réflechira à L & de L à H; ce qui étoit propoſé.

PROBLEME XVI.

69 *Deux points ou deux lieux étant donnez, avec un plan éloigné de ces deux points, l'on demande un point ſur ce plan, où il faut aller, pour arriver d'un lieu à l'autre par le chemin le plus court.*

Ou ce qui revient au même:

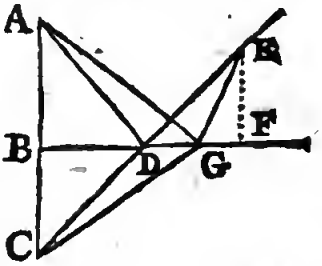
Un objet lumineux étant donné avec un miroir, & un œil hors de ce miroir, trouver le point de réflexion.

Soient les points A & E donnez; & ſoit auſſi le plan BF. On demande ſur ce plan le point D tel que la ligne AD plus DE ſoit la plus courte de toutes les autres menées de ce point à ce plan, par exemple, plus courte que $AG + GE$.

Pre-

Premiere maniere.

Soit menée la perpendiculaire AB prolongée juſques en C, en ſorte que $AB = BC$. Et ſoit du point E menée la ligne CE; je dis que le point D eſt celui qu'on cherche : car les deux triangles ABD & DCB ſont égaux, auſſi-bien que les deux ABG & CBG: donc $AD + DE = CD + DE$, & $AG + GE = CG + GE$. 70



Mais $CD + DE$ eſt une ligne droite : donc elle eſt plus courte que $CG + GE$. Si le point G étoit entre B & D, ce ſeroit la même démonſtration.

Remarquez que les deux triangles ABD & CBD étant égaux, ils ſont ſemblables : donc les angles ADB & BDC ſont égaux; mais EDF eſt égal à BDC : donc EDF eſt égal à ADB; ainſi comme dans un miroir l'angle de réflexion eſt égal à celui d'incidence, ſi l'objet eſt en E, & que le miroir ſoit BF, le point de réflexion ſera D, & la lumiere réflechira au point A. Ainſi la lumiere eſt portée par le plus court chemin.

Seconde maniere.

On ſuppoſe que l'angle d'incidence EDF eſt égal à ADB, celui de réflexion. Il s'agit de trouver le point D où tombera la lumiere qui réflechit de l'objet E à l'œil A, & 71

va par le chemin le plus court. Les grandeurs connues ſont $AB = a$, $EF = b$, & $BF = d$. L'inconnue eſt $BD = x$. Puiſqu'on ſuppoſe que les angles d'incidence & de réflexion ſont égaux, donc les deux triangles rectangles ABD & EFD ſont ſemblables; donc $a+b.\ a::d.x$. Donc $\frac{ad}{a+b} = x$: ainſi la valeur de BD eſt connue.

Fin des Elémens de Géometrie.

INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes Courbes que repréſentent les differentes Sections du Cône. Leurs noms, & la méthode la plus ſimple pour connoitre leurs principales proprietez.

JE n'ai parlé dans ces Elémens de Géometrie, que de la Ligne Droite & du Cercle; mais comme il y a d'autres Lignes qu'on nomme des Lignes Courbes, qui ſont maintenant l'objet principal des plus grands Géometres, à cauſe des proprietez ſingulieres & merveilleuſes qu'ils y découvrent, il ſeroit à propos de donner leur génération, avec quelques-unes de leurs principales proprietez. Je parlerai ſeulement des plus anciennes & des plus connues, qui ſont celles qu'on remarque en coupant le Cône de differentes manieres, & auxquelles on a donné le nom de *Sections Coniques*. Je déterminerai quelques-unes des principales proprietez de ces lignes. Voici comme elles s'engendrent dans le Cône.

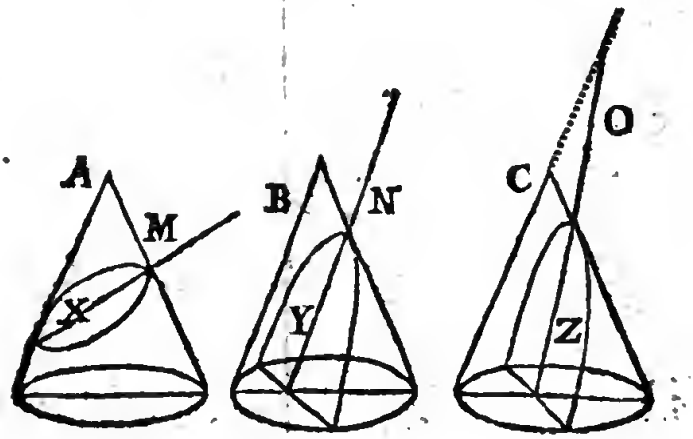
Soit imaginé un Cône droit.

1°. Si on le coupe par un plan qui paſſe par ſon axe, il eſt clair que cette Section ſera un triangle, dont les côtez ſeront les côtez mêmes du Cône, & la baſe le diametre du cercle de la baſe du Cône.

Je ſuppoſe dans la ſuite, que le plan coupant, de quelque maniere qu'il coupe le Cône, eſt perpendiculaire ſur le plan de ce triangle.

2°. Si le plan coupant eſt parallele à la baſe du Cône, la Section eſt un cercle, comme il eſt évident.

3°. Si le plan coupant n'étant pas parallele à la baſe, rencontre l'axe du Cône, & ſes deux côtez (je veux dire les deux côtez de ce triangle, qui eſt la Section du Cône par un plan qui paſſe par ſon axe) cette Section, ou le coutour de cette Section repréſentera une ligne courbe, qu'on nomme *Ellipſe* ou *Ovale*. Telle eſt la figure *X*, formée dans le Cône *A* par le plan coupant ſuivant la ligne *M*.



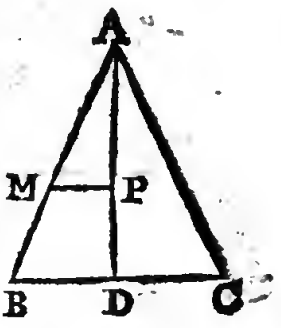
4°. Si le plan coupant ne coupe qu'un des côtez dudit triangle, & que la Section ſoit parallele à l'autre côté, cette Section ou le con-

contour de cette Section ſera une autre Courbe, qui s'appelle *Parabole*. Telle eſt la figure Courbe *Y*, formée dans le Cône *B* par le plan qui le coupe, ſuivant la ligne *N*, parallele au côté.

5°. Si le plan coupant ne coupe qu'un ſeul côté, de maniere que ce plan prolongé puiſſe rencontrer l'autre côté dudit Cône ou Triangle auſſi prolongé au-deſſus du ſommet, cette Section ou le contour d'icelle eſt ce que l'on nomme *Hyperbole*. Telle eſt la figure *Z* formée dans le Cône *C* par le plan coupant, ſuivant la ligne *O*.

Comme il n'eſt pas néceſſaire de s'imaginer un Cône pour expliquer la nature du cercle qui eſt une de ſes Sections, on peut auſſi découvrir les proprietez de toutes les lignes courbes que repréſentent les Sections du Cône, ſans être obligé de penſer à ce ſolide. Or il y a de certains termes dont nous devons nous ſervir, en parlant de ces Sections, qu'il faut expliquer.

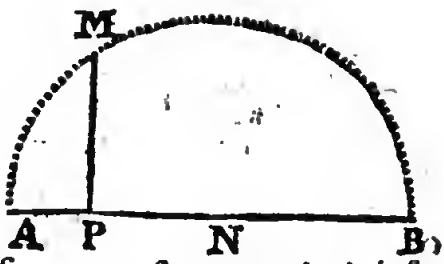
Soit le triangle BAC, qui eſt la Section du Cône par l'axe. Soit $AP = x$, $PM = y$, $AD = a$, $BD = b$. On aura par-tout $x. y :: a. b$; donc $ay = bx$, qui eſt l'Equation qui exprime la nature du triangle.



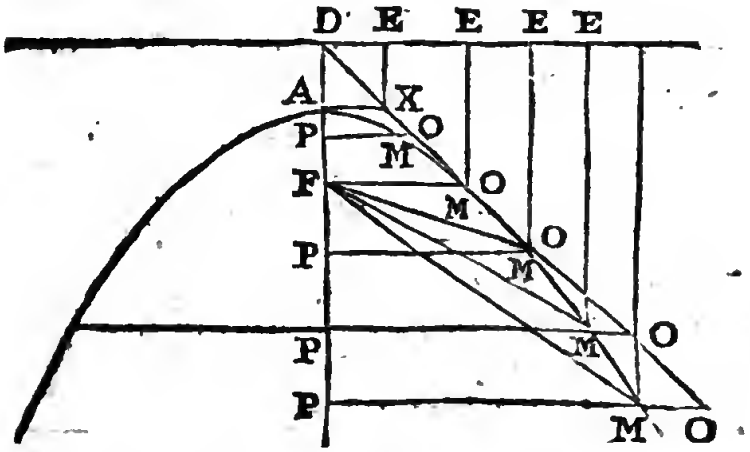
Soit AMB un demi cercle, dont N eſt le centre, & $AN + NB$ ou AB eſt le diametre. Soit $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; ainſi $PB = a - x$. Partant $\div x. y. a - x$; ainſi $ax - xx = yy$ eſt l'Equation qui exprime la nature du cercle. Une per-

pen-

pendiculaire telle que *MP* menée d'un point quelconque *M* de la circonference ſur le diametre *AB*., s'appelle *Ordonnée*; & la partie du diametre priſe entre ſon extrémité & la rencontre de l'Ordonnée, ſe nomme *Abſciſſe*.



Soit *DEE* une ligne droite donnée, avec *F* un point hors de cette ligne; je nomme cette ligne *DEE* la Directrice. Soit *AMN* une courbe telle, que toute ligne perpendiculaire ſur *DE* tombant ſur *M*, un des points de la courbe, ait toujours un même rapport avec une ſe-



con le ligne tirée du point *M* au point donné *F*. Cette ligne courbe eſt réguliere, & ſe peut décrire; c'eſt-à-dire, qu'on peut trouver tous les points par leſquels elle doit paſſer. On donne ces noms à ſes points, & à ſes lignes.

Le

Le point *A* eſt le *ſommet* de la courbe. Le point *F* ſe nomme le *Foyer*. La ligne *AF* prolongée en eſt l'*Axe*. Les lignes qui coupent perpendiculairement cet Axe, & qui ſont compriſes entre la courbe & cet Axe, s'appellent les *Ordonnées*. *PM* eſt une *Ordonnée*. La partie de l'Axe priſe du ſommet *A* juſques à la rencontre d'une Ordonnée, ſe nomme *Abſciſſe*. Ce qui fait la difference eſſentielle des trois Sections Coniques, la Parabole, l'Ellipſe, & l'Hyperbole, c'eſt une raiſon qui eſt particuliere à la ligne *AD*, avec *AF*. Dans ces trois Sections, je nommerai ce rapport de *p* à *q*. Dans la Parabole, c'eſt toujours une raiſon d'égalité; à l'Ellipſe, *p* eſt toujours plus grand que *q*; & dans l'Hyperbole, *p* eſt toujours plus petit que *q*. A cela près, la maniere de conſtruire ces lignes eſt la même, & cette conſtruction eſt aiſée.

CHAPITRE II.

De la Parabole, ou Ligne Courbe que repréſente la Section d'un Cône droit, par un plan parallele à l'un de ſes côtez.

DEFINITION PREMIERE.

LA ligne droite DE *eſt donnée, avec le point* F *hors de cette ligne.* DE *eſt la directrice de la Courbe, dont on parle. La ligne* FD *eſt perpendiculaire ſur cette directrice* DE. *Si cette perpendiculaire eſt coupée au point* A, *de ſorte que* FA = AD; *& que de chaque point de la Courbe comme* M *ayant mené ſur* DE *une per-*

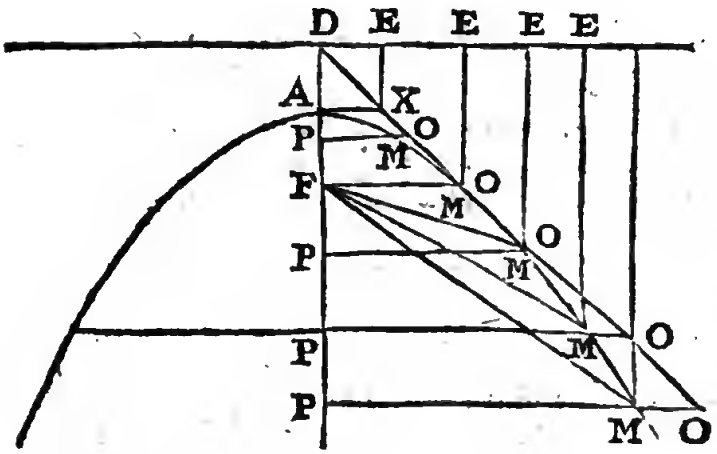
pendiculaire, & une autre ligne au point F, *ces deux lignes ſoient égales, que* MF = ME, *ſoit nommée cette Courbe, Parabole.*

On démontrera que cette Courbe eſt la Section Conique qu'on appelle Parabole. J'exprimerai ce rapport d'égalité de *EM* à *MF*, par ces deux lettres *p* & *q*.

PROBLEME I.

Trouver chaque point de la Courbe, qu'on vient de définir.

DE eſt la ligne directrice qui eſt donnée, & *F* le Foyer. Il faut couper *DF* en deux parties égales, ainſi *A* eſt le ſommet de la Courbe. Pour trouver ces autres points, il faut 1°. par *A* mener une parallele à *DE*, dans laquelle on prend *AX* égale à *FA*; & par *D* & par *X* on tire une ligne indéfinie. 2°. Ayant enſuite mené tant de paralleles qu'on voudra à *DE*,



qui coupent l'Axe *DF* prolongé, on trouvera aiſément les points de ces paralleles par leſquels paſſe la courbe; par exemple le point *M*, dans

dans la ligne *PO*. De l'intervalle de *PO* & du Foyer *F* comme centre, je fais un cercle qui coupera *PO* en *M*; alors *AD. AX:: p. q*, & *AD. AX:: DP. PO*. Or $DP = ME$, & par la conſtruction $PO = FM$: Donc * *ME. FM:: p. q*. Ainſi *M* eſt un des points de la parabole, ſelon la Définition précédente.

Remarquez que la ligne indéfinie *DX* fait avec *DF* un angle de 45 degrez; car *DAX* eſt droit, & $AD = AX$: Donc ce triangle eſt iſoſcele; ainſi l'angle *ADX* eſt égal à *AXD*. Par conſéquent chacun la moitié de l'angle droit ou de 45 degrez.

DEFINITION II.

Une ligne toujours double de FD, *ou quadruple de* FA, *ou de* AD, *s'appelle le* Parametre de la Parabole.

Soit nommé *a* ce Parametre; l'Ordonnée *PM* ſoit nommée *y*, & l'Abſciſſe *PA* ſoit nommée *x*. Il ne ſe faut mettre en peine, entendant parler de Parametre, d'autre choſe que de ce que dit la Définition, qu'on appelle ainſi, une *Ligne Quadruple* de *FA* ou de *AD*.

REMARQUE.

Comme cette Introduction ſuppoſe la connoiſſance de ces Elémens de Géometrie, on n'aura pas la même rigueur pour citer les Propoſitions dont on tire les preuves, du moins dans les choſes les plus faciles où l'eſprit doit être verſé.

THEOREME I.

Le rectangle fait du Parametre & de l'Abſciſſe, eſt égal au quarré de l'Ordonnée. Ou cette Ordonnée eſt une moyenne proportionnelle entre le Parametre & l'Abſciſſe.

FA

* *Liv. 3. n. 53.*

FA ou *AD fig. précéd.* ſoit nommé *b*. L'Abſciſſe *AP* a été nommée *x*. Donc *PD* ou $ME = b + x$, & $FP = x - b$ ou $b - x$, ſelon que le point *P* ſe trouve au-deſſus ou au-deſſous du Foyer *F*. Le Parametre *a* eſt quadruple de *AD* ou de *AF*, & partant de *b*; ainſi $a = 4b$. Il faut démontrer que $\div a.y.x$; ou ce qui eſt la même choſe que $ax = yy$ *. Selon la premiere Définition $\overline{MF}^2 = \overline{EM}^2$; mais $EM = PA + AD = b + x$. Donc $\overline{MF}^2 = bb + 2bx + xx$. Et puiſque $FP = b - x$: donc $\overline{FP}^2 = bb - 2bx + xx$. Or $\overline{FM}^2 - \overline{EP}^2 = \overline{PM}^2 = yy$ †. Donc $bb + 2bx + xx - bb + 2bx - xx = yy$. Mais $+ bb - bb = 0$, & $+ xx - xx = 0$; reſte donc $2bx + 2bx$, ou $4bx = yy$. Or $4b$ eſt la valeur du Parametre *a*; partant $ax = yy$, ou $a.y :: y.x$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Dans la Parabole les quarrez des Ordonnées ſont entre eux, comme les parties de l'Axe priſes entre ſon ſommet & la rencontre de ces mêmes Ordonnées.

Le Parametre *a* eſt toujours le même; mais *x* qui eſt l'Abſciſſe eſt plus petite ou plus grande, ſelon que l'Ordonnée eſt plus près ou plus éloignée du ſommet *A*. Or puiſqu'on a toujours $yy = ax$, en quelque endroit que l'on prenne l'Ordonnée; donc les *yy* ou les quarrez des Ordonnées ſont entre eux comme les *x*, ou les Abſciſſes ‡.

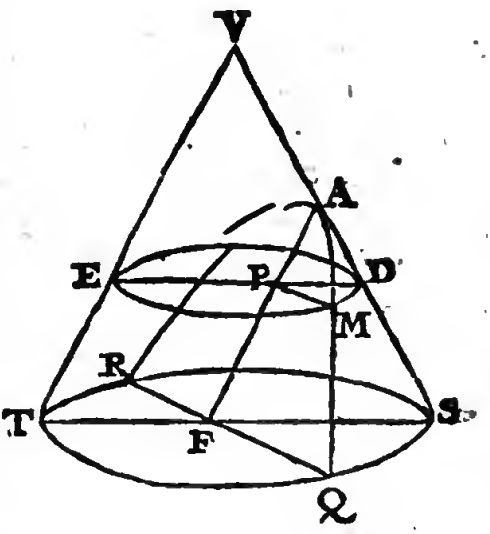
THEOREME II.

Cette Section Conique qu'on nomme Parabole, *eſt*

* *L. 3. n. 58.* † *L. 4. n. 78.* ‡ *L. 3. n. 54.*

eſt la même Courbe que celle qu'on vient de définir & de décrire.

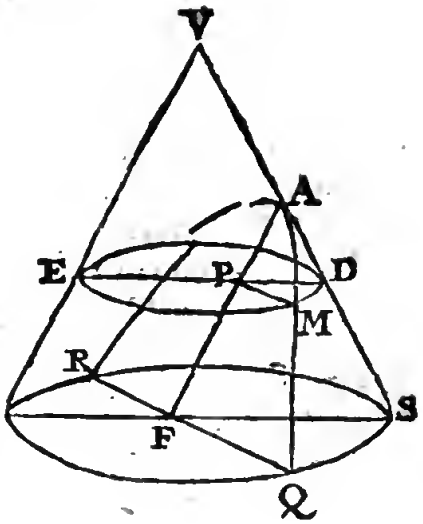
SVT eſt un Cône droit coupé par un plan ſelon AF parallele au côté TV; il faut prouver que la Section QAR, qui eſt une Parabole, a les proprietez de la ligne courbe dont on vient de parler. Quelle que ſoit la ligne QAR, concevons que ſur la ligne AF, les lignes PM & QF ſont des perpendiculaires ſur AF, que je nomme l'Axe de cette Courbe. PM & QF en ſont ainſi les Ordonnées: par conſéquent pour prouver que cette Parabole QAR eſt cette Courbe dont on vient de parler, il s'agit de prouver que les quarrés $\overline{MP}^2$ & $\overline{QF}^2$ & de toutes les autres Ordonnées, ſont entre eux comme les parties AP, AF, de l'Axe qu'elles coupent; car cela étant il faut, ſelon le Corollaire précédent, que la Courbe QAR ſoit une telle ligne.



Concevons que le Cône droit SVT eſt coupé au point M par un plan parallele à ſa baſe. Cette Section PME eſt donc un cercle. Soit SQT un autre cercle parallele à DME. La ligne MP eſt l'Ordonnée de la Parabole QAR, & du cercle DME, étant perpendiculaire tant ſur ED que ſur AF, d'autant qu'elle eſt

la

la commune Section du plan du cercle & de celui de la Parabole, qui par la conſtruction, coupe celui du triangle à angles droits [a]. Il en eſt de même de QF, qui eſt auſſi Ordonnée, tant au cercle qu'à la Parabole. Or $\div DP.MP.PE$[b]; & de même $\div SF.FQ.FT$: Donc



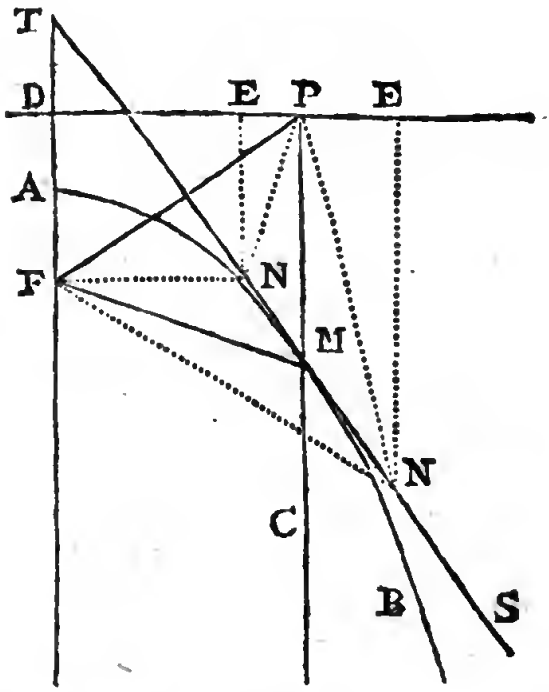
$DP \times PE = \overline{MP}^2$, & $SF \times FT = \overline{FQ}^2$ [c]: Donc $DP \times PE. SF \times FT :: \overline{MP}^2. \overline{FQ}^2$; mais $PE = FT$ [d]: Donc $\overline{PM}^2 . \overline{FQ}^2 :: DP . SF$ [e]. Or à cauſe des triangles ſemblables DPA & SFA, $AP.AF :: DP.SF$: Donc $\overline{MP}^2 . \overline{FQ}^2 :: AP.AF$: Donc par le Corollaire précédent, QAR eſt de la nature de cette ligne dont on a parlé dans ce Chapitre, qui eſt auſſi la Section Conique qu'on appelle *Parabole*.

THEOREME II.

Une Parabole étant donnée, mener ſur un point quelconque une ligne touchante en ce point.

Soit la demi Parabole AMB; on demande que du point M, l'on mene la touchante MT. Soit

a *L.* 5. *n.* 20. & 30. b *L.* 4. *n.* 29. c *L.* 3. *n.* 57. d *L.* 4. *n.* 3. e *L.* 4. *n.* 75.



Soit menée du Foyer *F* au point *M* la ligne *FM*, & du point *M* la ligne *MP* parallele à l'Axe, & terminée par la directrice *DP*. Si l'on mene *FP*, & qu'on la diviſe en deux parties égales, la ligne *MT* menée par ce point de diviſion ſera la tangente que l'on demande; ce qu'il faut prouver.

Le triangle *EMP* eſt iſoſcele par la génération; donc *MT* eſt perpendiculaire ſur *FP* *. Une ligne eſt touchante lorſqu'elle touche en un ſeul point, ce qui arrive ici; car toute autre point qu'on aſſigne en cette ligne *TS*, n'eſt pas dans la Parabole, mais hors d'icelle; que par exemple, *N* pris dans *TS* au-deſſus ou au-deſſous de *M*, n'eſt point dans la Parabole. Car ſoient me-

* *L. 1. n. 43.*

menées les lignes NF, NP, & NE, paralleles à l'Axe, NF sera toujours plus grande que NE*. Or par la construction, puisque TN est perpendiculaire sur FP, les lignes NF & NP sont égales †. NF est donc plus grande que NE, par conséquent N n'est pas un des points de la Parabole: car s'il l'étoit, FN seroit égale à NE, selon la Définition de la Parabole. Mais FN étant plus grande, ce point N sera hors d'icelle.

COROLLAIRE.

Il est évident que si la courbe AMB représente la Section d'un miroir parabolique, & que CM soit un rayon incident parallele à l'Axe AF, la ligne MF représentera le rayon réflechi; l'angle d'incidence CMS étant égal à FMT, l'angle de réflexion: car l'angle CMS est egal à l'angle opposé TMP ‡. Or par la construction, TMP est égal à TMF; donc TMF est égal à CMS. Partant tous les rayons qui tomberont sur la surface concave de ce miroir parallelement à l'Axe, se réuniront au point F: & c'est ce qui le fait appeller *Foyer*. Ainsi pour faire un bon miroir ardent, il faut lui donner la figure d'un Conoïde Parabolique creux.

CHAPITRE III.

De l'Ellipse ou de la ligne que représente la Section d'un Cône, par un plan, qui coupe ses deux côtez, & qui ne soit pas parallele à celui de la base.

DEFINITION PREMIERE.

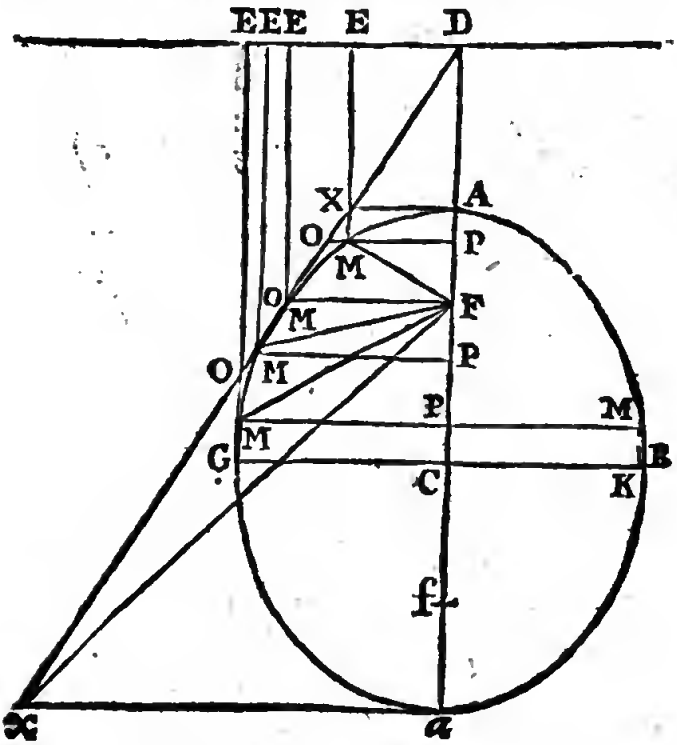
Soit donnée pour directrice de la ligne Courbe qu'on va définir, la ligne droite DE *avec un point*

* *L.* 1. *n.* 53. † *L.* 1. *n.* 42. ‡ *L.* 2. *n.* 21.

point, F, *hors de* DE. FD *eſt perpendiculaire ſur* DE. *Si cette perpendiculaire eſt coupée au point* A, *ſelon la raiſon de* p *à* q, *je ſuppoſe que* p *eſt plus grand que* q; *& que de chacun des points de la Courbe, comme de* M, *ayant mené une perpendiculaire ſur* DE *& une autre ligne au point* F, *la ligne* EM *ſoit toujours à* FM *comme* p *à* q; *cette ligne ſe doit nommer* Ellipſe, *parce qu'on prouvera qu'elle eſt la même que celle de la Section du Cône qui a ce nom.*

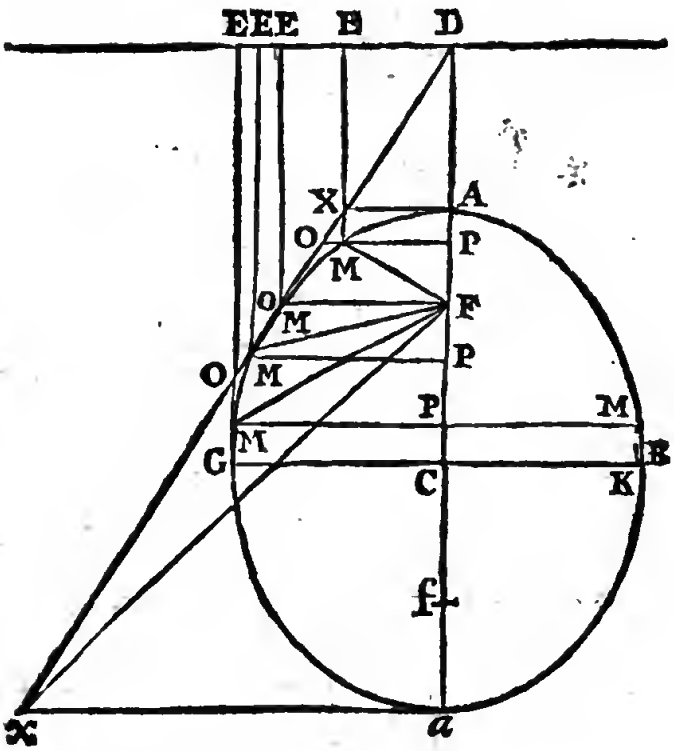
PROBLEME I.

La directrice DE *étant donnée avec* F, *qui eſt un point hors d'elle, trouver tous les points de cette Courbe qu'on vient de définir.*



Il faut 1°. diviſer *FD* en *A*; de ſorte que *AD. FA* :: *p. q.*

2°. Il



2°. Il faut mener par *A* une parallele à la directrice *DE*, & prendre *AX* égale à *AF*. Ainſi *AD*. *AX* :: *p*. *q*.

3°. Il faut tirer par *D* & *X* une ligne indéfinie; après quoi coupant l'Axe par tant de paralleles qu'on voudra, il ſera aiſé de trouver dans ces paralleles le point par où paſſe la courbe. De *F* comme centre, & de l'intervalle *PO*, je fais un cercle qui coupe *PO* en *M*. A cauſe des triangles ſemblables *DAX* & *DPO*, la ligne *PD*, ou ſon égale *EM*, eſt à *PO* ou *FM*, comme *AD* eſt à *AX*; partant *EM*. *FM* :: *AD*. *AX* :: *p*. *q*. Le point *M* eſt donc un point de la courbe, qu'on vient de définir.

PRO-

PROBLEME II.

Trouver l'Axe de cette Courbe.

La ligne DX ſoit prolongée à l'infini, & ſur le prolongement de AD au point F ſoit menée une ligne qui faſſe un angle de 45 degrez, & continuée juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne indéfinie DX.

Du point x où ſe fait cette rencontre, ſoit menée la perpendiculaire xa ſur Fa. Donc dans le triangle Fax, l'angle Fxa eſt auſſi de 45 degrez: donc le triangle Fax, eſt iſoſcele. Or $AD. AX :: Da. ax$ * ; & puiſque Fax eſt iſoſcele, $ax = Fa$: donc $AD. AX :: Da. Fa$. Mais $AD. AX :: p. q$. Donc $Da. Fa :: p. q$. Partant a eſt un des points de la Courbe, comme il eſt évident.

DEFINITION II.

1°. A a *eſt le grand Axe de l'Ellipſe. Le point* C *qui diviſe* A a *par la moitié, eſt le centre. La ligne* B G *qui coupe à angles droits* A a, *eſt le petit Axe. Ayant pris* f a *égale à* F A, *les points* F & f *ſont les foyers. Nous verrons pourquoi on leur donne ce nom.*

2°. *Les perpendiculaires menées d'un point quelconque de la Courbe à un des Axes, s'appellent* Ordonnées.

Ainſi PM étant une Ordonnée à l'Axe Aa, la ligne AP eſt une Abſciſſe.

3°. *La troiſieme proportionnelle aux deux Axes eſt appellée* Parametre du premier de la proportion.

Parametre, c'eſt un nom dont il ſuffit de concevoir ce qu'on met dans ſa Définition.

THEO-

* *L.* 4. *n.* 16.

THEOREME I.

L'intervalle F f *des Foyers* F & f, *eſt au grand Axe* A a, *comme* q *eſt à* p. *Fig. précéd.*

On a démontré que $q.p :: AX.AD :: Fa.Da$: Donc $Fa-AX.Da-AD :: q.p$. Or puiſque $fa=FA=AX$: Donc $Fa-AX=Ff$. Mais $Da-AD=Aa$: Donc $Ff.Aa :: q.p$; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME II.

A C *moitié du grand Axe* A a, *eſt une moyenne proportionnelle entre* F C, *moitié de l'intervalle des Foyers*, & *la ligne* C D.

La moitié eſt à la moitié, *fig. précéd.* comme le tout eſt au tout; partant $AC.FC :: Aa.Ff$. Mais $Aa.Ff :: AD.AX$, par le Théorême précédent: donc $AC.FC :: AD.AX$; ou $FC.AC :: AX.AD$, & $FC.FC+AX :: AC.AC+AD$. Or par la conſtruction $FA=AX$; ainſi $FC+AX=FC+FA=AC$, & $AC+AD=CD$. Mettant donc AC en la place de $FC+AX$, & CD en la place de $AC+CD$, viendra $FC.AC :: AC.CD$. Partant $\div FC.AC.CD$; ce qu'il falloit démontrer.

PREPARATION

Pour les démonſtrations des Théorêmes ſuivans. Même Figure.

Soit $AC=d$, & $CF=g$: donc FA ou $AX=d-g$, & Fa ou $ax=d+g$. Or AC ou d eſt moyenne proportionnelle entre CF ou g & CD, par le Theorême précéd. donc $\div g.d.CD$. Donc multipliant d par d, & diviſant le produit

duit dd par g, le quotient $\frac{dd}{g}$ ſera égal à CD *.

Soit $CP=x$, & $PM=y$: donc $PF=x-g$, ou $g-x$ & DP, ou $ME=\frac{dd}{g}-x$, lorſque le point P eſt au-deſſus du centre C. Par la génération de l'Ellipſe,

$$d.\ g::\ \frac{dd}{g}-x.\ MF=d-\frac{gx}{d}\ \dagger,$$

de laquelle proportion MF eſt le quatrieme terme. Lorſque le point P eſt au-deſſous du centre C, alors $PF=x+g$ & DP, ou $ME=\frac{dd}{g}+x$: donc, comme deſſus, $MF=d+\frac{gx}{d}$.

THEOREME III.

Le quarré d'une Ordonnée quelconque PM *au grand Axe* Aa, *eſt au rectangle* AP × Pa *parties de cet Axe, comme le rectangle* AF × Fa *auſſi parties de cet Axe, eſt au quarré de* AC *ou* Ca *moitié de ce même Axe*, même Fig.

$AC=d$, $CF=g$, $PC=x$: donc $AP=d-x$ & $Pa=d+x$. Ainſi $AP\times Pa=dd-xx$. De même puiſque $AF=d-g$, & $Fa=d+g$: donc $AF\times Fa=dd-gg$. Ainſi ſuppoſant $PM=y$; voilà ce qu'il faut démontrer,

$$yy.\ dd-xx::\ dd-gg.\ dd.$$

Et pour cela, que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, c'eſt-à-dire, $yydd=d^4-ddxx-ddgg+ggxx$.

Le triangle FMP étant rectangle $\overline{FM}^2-\overline{PF}^2=$

T

* *L. 3. n. 60.* † *L. 3. n. 60.*

$= \overline{PM}^2 = yy$. Or $FM = d - \frac{gx}{d}$; ainſi $\overline{FM}^2$ $= dd - 2gx + \frac{ggxx}{dd}$, & $PF = g - x$: donc $\overline{PF}^2 = gg - 2gx + xx$. Donc $\overline{PM}^2$, ou $yy = dd - 2gx + \frac{ggxx}{dd} - gg + 2gx - xx$. Or effaçant les termes qui ſe détruiſent par $+$ & $-$, il viendra $yy = dd + \frac{ggxx}{dd} - gg - xx$; & multipliant tous ces termes de part & d'autre par dd, l'on aura $ddyy = d^4 + ggxx - ggdd - ddxx$; Donc, &c.

THEOREME IV.

Soit BC $= b$, *le rectangle* AF × Fa, *où* dd $-$ gg *eſt égal à* bb *quarré de* BC *moitié du petit Axe* BG. Même Figure.

Il faut prouver que $bb = dd - gg$. $BC = b$ eſt une Ordonnée qui ſe trouve au centre; ainſi $x = o$, & $d - x = d$ & $y = b$; ainſi $yy = bb$. Or par le Théoréme précédent $yy. dd - xx :: dd - gg. dd$. Donc mettant bb en la place de yy, & effaçant $- xx$, on aura $bb. dd :: dd - gg. dd$; ou $bb. dd - gg :: dd. dd$; ainſi $bb = dd - gg$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME V.

Le quarré de MK *Ordonnée au petit Axe* BG *eſt au rectangle* BK × KG *parties de cet Axe, comme le quarré du grand Axe* Aa *eſt au quarré du petit* BG. Même Fig.

Le grand [illegible] *Aa* eſt égal à $AC + Ca$ ou à $2AC$; partant à $2d$. On a nommé b la moitié du petit Axe BG; ainſi $2b = BG$. On a déja nom-

nommé x la ligne CP. Or l'Ordonnée MK lui eſt égale, qui ſera ainſi x. La ligne PM ordonnée au grand Axe a été nommée y. Ainſi CK, qui lui eſt égale, eſt auſſi y; partant $b-y=BK$ & $b+y=KG$, & $bb-yy=BK\times KG$*. Le quarré du grand Axe Aa ou $2d$, eſt $4dd$. Celui du petit Axe BG ou $2b$, eſt $4bb$. Voilà donc ce qu'il faut démontrer,

$$xx.\ bb-yy::\ 4dd.\ 4bb.$$

Selon le troiſieme Théorême,

$$yy.\ dd-xx::\ dd-gg.\ dd.$$

Par le quatrieme $bb=dd-gg$. Mettant donc bb en la place de $dd-gg$, vient

$$yy.\ dd-xx::\ bb.\ dd.$$

Donc $yy.\ dd-xx::\ 4bb.\ 4dd$†; & multipliant les extrêmes & les moyens, l'on aura $4ddyy=4bbdd-4bbxx$, ou $4bbxx=4bbdd-4ddyy$; & remettant cette égalité en proportion, l'on aura enfin $xx.\ bb-yy::\ 4dd.\ 4bb$ ‡.

THEOREME VI.

Le Parametre eſt au diametre comme le quarré de ſon Ordonnée eſt au rectangle fait des parties de ce diametre priſes depuis la rencontre de cette Ordonnée. Même Figure.

AC moitié du grand diametre Aa a été nommé d; & b celle du petit, BC. Ainſi $BG=2b$. Soit le Parametre nommé a; il faut, ſelon ſa Définition, que $2d.\ 2b::\ 2b.\ a$; Donc $\frac{4bb}{2d}$ ou $\frac{2bb}{d}=a$, & multipliant les deux membres de cette Equation par d, viendra $2bb=ad$, & di-

* *L.* 3. *n.* 21. † *L.* 3. *n.* 54. ‡ *L.* 3. *n.* 58.

diviſant par 2, on aura $bb = \frac{1}{2}ad$. On a vu ci-deſſus par les Théorêmes trois & quatre, que

$$yy.\ dd - xx :: bb.\ dd.$$

Mettant $\frac{1}{2}ad$ en la place de bb, on aura $yy.\ dd - xx :: \frac{1}{2}ad.\ dd$. Diviſant chaque terme de la raiſon de $\frac{1}{2}ad$ à dd par d, vient $\frac{1}{2}a$, d; & les multipliant par 2 vient a, $2d$; ainſi $yy.\ dd - xx :: a.\ 2d$, ou $a.\ 2d :: yy.\ dd - xx$, qui eſt ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VII.

Les quarrez des Ordonnées ſont entre eux, comme les rectangles des parties de l'Axe faites par la rencontre de ces mêmes Ordonnés.

y & m ſont deux differentes Ordonnées, & n une autre partie que PC. Par le précédent Théorême,

$$a.\ 2d :: \begin{matrix} yy.\ dd - xx. \\ mm.\ dd - nn. \end{matrix}$$

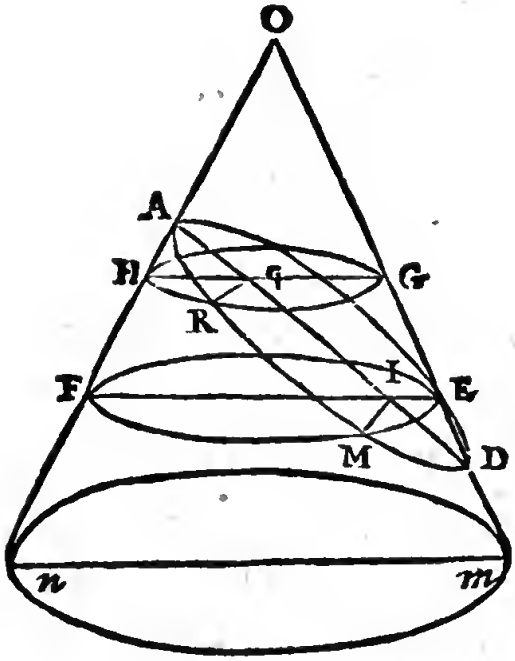
Donc $yy.\ mm :: dd - xx.\ dd - nn$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VIII.

La Section Conique qu'on nomme Ellipſe, *eſt la même Courbe que celle qu'on vient de définir & de décrire.*

Soit coupé le Cône mon par un plan qui faſſe un angle oblique avec ſon Axe, & qui coupe ſes deux côtez. La Section $DMAD$, qui eſt une Ellipſe, ſera la même ligne que celle dont on vient de montrer les proprietez.

Soient

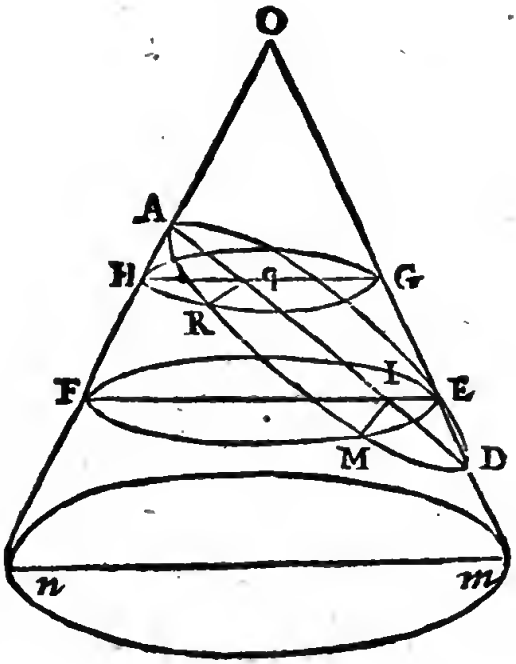


Soient imaginez les deux cercles paralleles *EMF* & *GRH*, dont les diametres coupent celui de la courbe *DMAD*, quelle qu'elle ſoit, en *I* & en *q*. Si l'on mene, des points *M* & *R*, où ces cercles coupent cette courbe, des lignes droites aux points *I* & *q*; il eſt évident que ces lignes ſeront des Ordonnées communes aux cercles & à la courbe *DMAD*, d'autant que *Rq* eſt perpendiculaire tant ſur *HG* que ſur *AD* *, étant la commune Section du plan du cercle & de l'Ellipſe, qui par la conſtruction coupent celui du triangle à angles droits. Il en eſt de même de *MI*.

Les triangles *AqH* & *AIF* ſont ſemblables; donc *Aq. FI*:: *Aq. AI*. Les triangles *DEI* & *DGq* ſont auſſi ſemblables; donc *Gq. EI*

* *L. 5. n. 30. & 20.*

EI:: *qD*. *ID*. Multipliant chaque terme de la premiere proportion par le terme qui lui ré-



pond dans la ſeconde, les produits ſeront en proportion étant compoſez de raiſons égales *.

$$Hq.\ FI :: Aq.\ AI,$$
$$Gq.\ EI :: Dq.\ DI;$$

Ainſi $Hq \times Gq.\ FI \times EI :: Aq \times Dq.\ IA \times DI$, à cauſe des cercles EMF & GRH, ſelon les Elémens $\overline{qR}^2 = Hq \times qG$, & $\overline{IM}^2 = FI \times IE$: Donc $\overline{qR}^2 . \overline{IM}^2 :: Aq \times Dq.\ AI \times ID$. Donc par le Théorême précédent cette Ellipſe $DAMD$ eſt la même que cette ligne dont nous avons démontré les proprietez, & qui par conſéquent eſt cette Section Conique qu'on nomme *l'Ellipſe*.

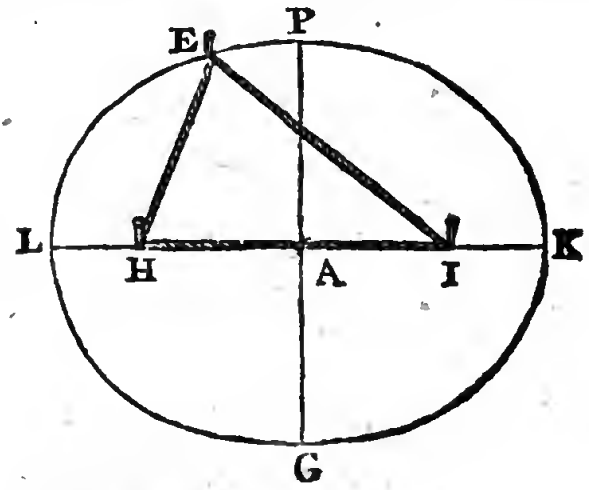
PRO-

* L. 3. n. 77.

PROBLEME III.

Décrire une Ellipſe par un mouvement continu.

Soient donnez ces deux points *H* & *I* comme foyers d'une Ellipſe, & la ligne *LK* comme le grand axe ou grand diametre. Pour décrire

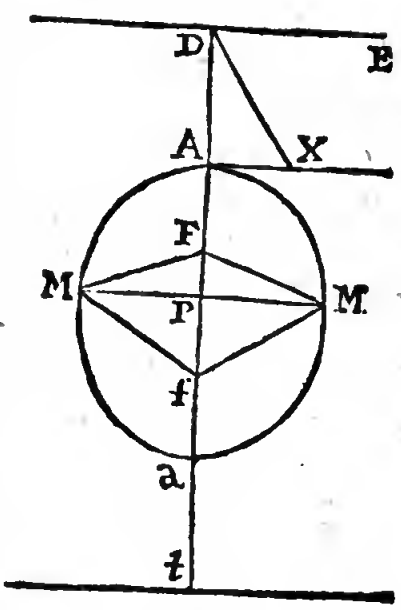


cette ligne, l'on prendra un fil dont la longueur ſera égale au grand diametre de l'Ellipſe, & l'attachant fixe par ſes extrémitez aux deux points *H* & *I*, on conduira à la main une pointe mobile qui laiſſe une trace en tournant autour de *H* & de *I*. Cette trace ſera une Ellipſe; ce qu'il faut démontrer.

Par la conſtruction de cette courbe quelle qu'elle ſoit, les deux lignes *HE* & *EI* priſes enſemble, ſont égales au grand axe *KL*; ainſi il n'eſt queſtion que de prouver que l'Ellipſe dont nous avons parlé, a cette proprieté.

Soit une Ellipſe Géometrique, dont *Aa* eſt

le grand diametre, *F* & *f* ſont les foyers. Il faut démontrer que $FM + Mf = Aa$.



Soit prolongé le diametre *A a* de part & d'autre, de ſorte que $AD. AF$, ou $AX :: p. q$, & de même $at. af :: p. q$, & qu'ainſi $at = AD$.

Soit menée par *t* une parallele à *D E*. Les rapports de *FM* à *PD* ſont les mêmes que *fM* à *Pt*. Par la Définition,

$$\left.\begin{matrix} FM. PD \\ fM. Pt \end{matrix}\right\} :: q. p :: AX. AD.$$

On a prouvé que $Ff. Aa :: AX. AD$ *: Donc $Ff + 2AX. Aa + 2AD :: AX. AD$. Or $Ff + 2AX = Aa$, & $Aa + 2AD = Dt$. Donc $Aa. Dt :: AX. AD$.

$$FM + fM. PD + Pt. :: AX. AD.$$
$$Aa. Dt.$$

Donc $FM + fM. PD + Pt :: Aa. Dt$.

Mais $PD + Pt = Dt$; donc $FM + fM = Aa$: ce qu'il falloit prouver.

Remarque.

C'eſt de cette maniere que les Jardiniers tracent les Ellipſes, auſſi nommées pour cela, Ovale du Jardinier. *Et lorſqu'on a les deux diametres donn-*

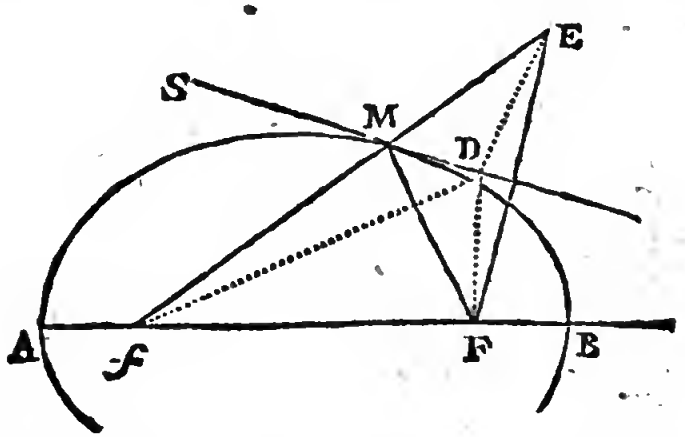
* *Théorème* 1.

donnez ſe coupant à angles droits, il faut pour en trouver les foyers H & I, Fig. de la p. 439. *de* P *ou de* G *extrémitez du petit Diametre, comme centres, & de l'intervalle* AL *ou* AK, *décrire une portion de cercle coupant* LK *en* H & I *qui ſoient leſdits foyers, comme il eſt évident par ce Problême.*

PROBLEME IV.

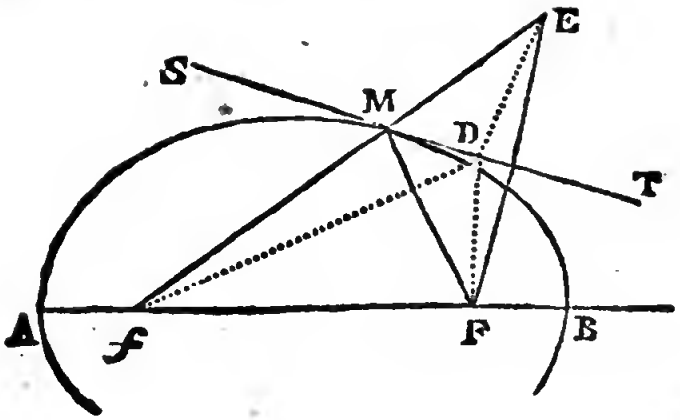
Une Ellipſe étant donnée, mener d'un de ſes points quelconque M *une tangente* MT.

Soient menées de ce point *M* aux deux foyers *F*, *f*, les deux lignes *MF*, *Mf*; & ſoit prolongée *fM* juſques en *E*, en ſorte que *ME* = *MF*. Soit menée la ligne *EF*. Si on diviſe cette ligne *EF* en deux parties égales par la ligne *MT*, je dis que *MT* ſera une Touchante.



Soit pris ſur cette Touchante un autre point *D*, d'où l'on menera les lignes *DE* & *DF* qui ſeront égales *, puiſque *MT* eſt perpendiculaire ſur *EF*. Il faut auſſi du point *D* mener la ligne *Df*. Or *fD* + *DE* eſt plus grande que *fM* + *ME*; par conſéquent plus que *fM* + *MF*: car par la conſtruction *MF* = *ME*; donc ce

* *L. 1. n. 38.*



point *D* ne peut être un de ceux de l'Ellipſe, qui a cette proprieté par le précédent Théorême, que ſi *D* étoit un de ces points, $fD + DF = fM + MF$. La ligne *DT* ne rencontre donc l'Ellipſe, qu'au point *M*.

COROLLAIRE.

Il eſt évident que ſi A M B *repréſente la Section d'un Miroir Elliptique*, & f M *ſoit un rayon incident*, *il ſe réflechira en* F.

Car l'angle d'incidence *fMS* eſt égal à l'angle de réflexion *FMT*; puiſque l'angle *SMf* eſt égal à *ℓMT* *, qui eſt égal à *TMF*. Ainſi tous les rayons qui partiront de *f*, & qui tomberont ſur la ſurface concave de ce Miroir, ſe réuniront au point *F*, & réciproquement s'ils partent du point *F*, ils ſe réuniront au point *f*: Et c'eſt pour cette raiſon qu'on appelle ces points *les Foyers*.

CHA-

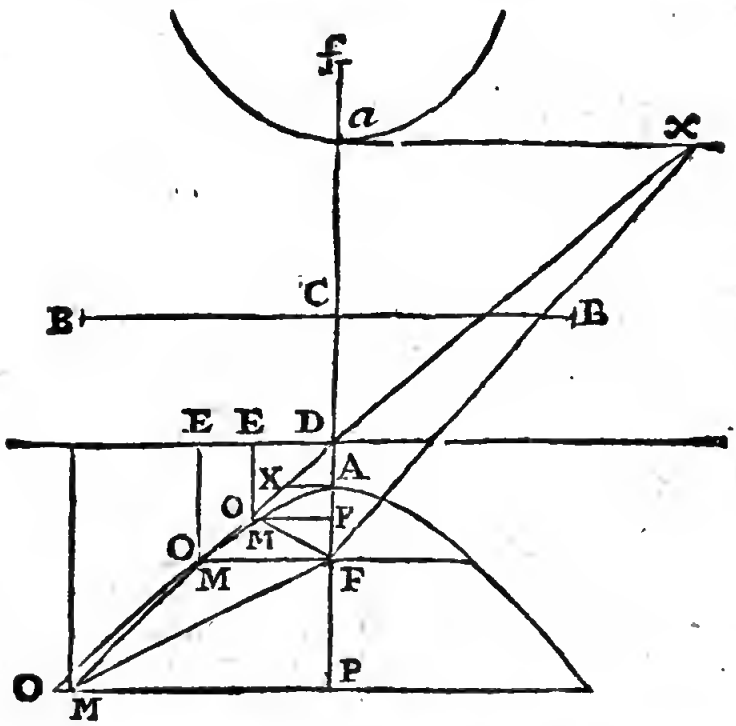
* *L. 2. n 21.*

CHAPITRE IV.

De l'Hyperbole, ou de la ligne qui repréſente la Section d'un Cône coupé par un plan parallele à ſon axe, ou même de maniere que coupant un ſeul côté dudit Cône, il puiſſe auſſi couper l'autre étant prolongé au-deſſus de ſon ſommet.

DEFINITION I.

SOit DE *une ligne droite priſe pour directrice*, & F *un point hors de cette ligne. La ligne* ED *eſt perpendiculaire ſur* DE. *Si on di-*



viſe FD *au point* A, *ſelon la raiſon de* p *à* q, (*on ſuppoſe ici que* p *eſt plus petit que* q) &

qu'on trace une courbe de laquelle ayant mené des perpendiculaires à DE *comme* EM, *& d'autres lignes à* F *comme* FM, *telles que* EM *ſoit à* MF *comme* p *à* q, *cette ligne ſe nomme* Hyperbole; *parce que l'on démontre qu'elle a les mêmes proprietez que la Section Conique de ce nom.*

PROBLEME I.

Trouver tous les points par leſquels paſſe cette Courbe.

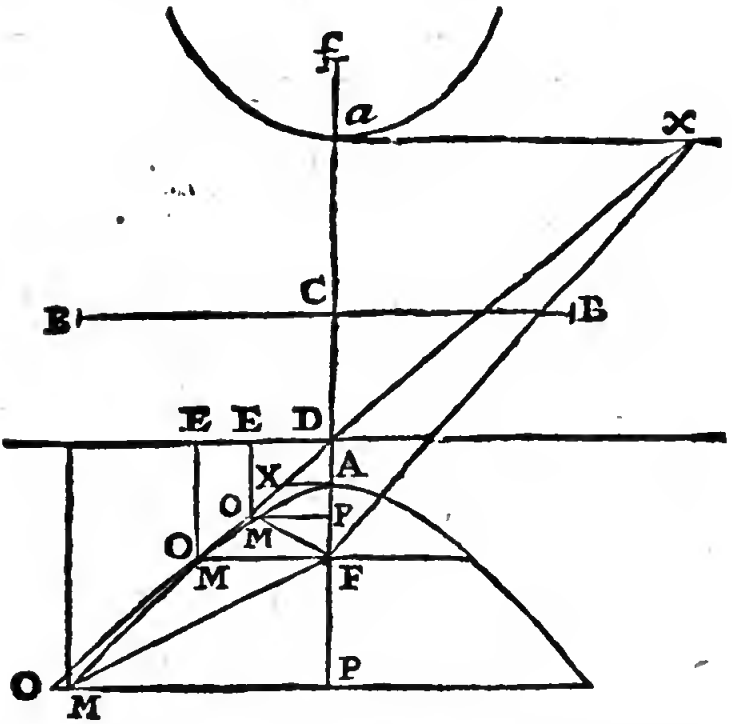
Je mene *AX* parallele à *DE*, & égale à *FA*, & je tire une ligne indéfinie de part & d'autre par les points *D* & *X*. Après quoi menant librement tant de paralleles qu'on voudra à *DE*, comme *PO*; pour trouver le point de cette ligne *PO* par où paſſe la Courbe, je fais un cercle de *F* comme centre, & de l'intervalle *PO*. Le point *M*, où ce cercle coupe *PO*, ſera le point que l'on cherche; car les triangles *DAX* & *DPO* étant ſemblables, *PO. PD :: AX. AD :: q. p.* Or par la conſtruction *PO = FM.* & *PD = EM*: Donc *FM. EM :: q. p.* Le point *M* eſt donc dans l'hyperbole par la Définition précédente.

PROBLEME II.

Trouver le ſommet d'une ſemblable Courbe, qui lui ſoit oppoſée.

En conſiderant les proprietez de cette courbe, on peut la comparer avec une autre courbe oppoſée toute ſemblable, dont on trouve le ſommet par cette pratique. On fait ſur *FD* l'angle *DFx* de 45 degrez, & du point *x* où *Fx* coupe la ligne indéfinie *XD*, on mene une perpendiculaire ſur *Ff*. Le point *a* ſur lequel tombe

be cette perpendiculaire, ſera un des points de la Courbe : car Fax étant iſoſcele, $ax = aF$.



Par la conſtruction, les triangles xDa & ADX ſont ſemblables ; donc $aD.\ ax$ ou $aF :: DA.\ AX$ ou AF. Ainſi $aD.\ aF :: DA.\ AF :: p.q$: Donc $aD.\ aF :: p.q$. Ainſi le point a ſera celui d'une Courbe oppoſée & ſemblable, ayant pris $fa = FA$, pour avoir le Foyer f, ſelon la Définition ſuivante.

DEFINITION II.

La ligne Aa *s'appelle* Axe traverſant *ou* Axe prolongé. *Le point* C *qui diviſe en deux l'Axe traverſant, ſe nomme le* Centre.

Si l'on mene par C *une perpendiculaire* BB, *dont la grandeur eſt déterminée par un cercle dé-*

crit du point A *& de l'intervalle* CF, *cette ligne* BB *ſe nomme l'*Axe conjugué.

Les points F *&* f *ſont les* Foyers.

Les perpendiculaires menées d'un des points des Courbes ſur un des Axes, ſont les Ordonnées.

Les Abſciſſes *ſont les parties de ces Axes priſes depuis leur origine juſqu'à la rencontre des Ordonnées.*

Quelquefois leur origine eſt au centre, & quelquefois au ſommet des Hyperboles.

La troiſieme proportionnelle aux deux Axes eſt appellée Parametre du premier de la proportion.

THEOREME I.

L'Axe traverſant Aa *eſt à* Ff, *intervalle des Foyers, comme* p *à* q.

Dax & *DAX* ſont deux triangles ſemblables: *figure précéd.* Donc *AX. ax:: AD. Da.* Or *AX=AF & ax=aF*: Donc *AF. aF :: AD. Da.* Donc *componendo AD + Da. AD:: AF + Fa. AF.* Mais *AF + Fa = Ff*: car *AF = af* & *AD + Da = Aa.* Donc *Aa. AD:: Ff. AF*, & *Aa. Ff:: AD. AF.* Or *AD. AF*, ou *AX:: p. q*; Donc *Aa. Ff:: p. q*; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.

CD *eſt une troiſieme proportionnelle à* CA *&* CE. *figure précédente.*

Puiſque les Touts ſont aux Touts, comme les Moitiez ſont aux Moitiez, que *CF* eſt la moitié de *Ff*, & *CA* eſt la moitié de *Aa*: donc *Ff. Aa:: CF. CA:: AX. AD*: donc *CF. CA:: CF — AX* ou *AF. Ca — AD.* Or

CF.

$CF - AF = CA$, & $CA - AD = CD$. Donc $CF. CA :: CA. CD$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME III.

Le quarré d'une Ordonnée quelconque PM *à l'axe* Aa *traverſant, eſt au rectangle de* AP × Pa *parties de cet axe, comme le rectangle* AF × Fa *eſt au quarré de* CA *ou* Ca.

Soit $CA = d$, l'Ordonnée $PM = y$, $CP = x$, & $CF = g$; donc *figure précéd.* lorſque P eſt au-deſſous ou au-deſſus du point F, $PF = x - g$, ou $g - x$. L'on aura donc $DP = x - \frac{dd}{g}$; car par le Théorême précédent $CD = \frac{dd}{g}$. Mais par la conſtruction & par le Théorême premier, $d. g :: x - \frac{dd}{g}. MF$; Donc $MF = \frac{gx}{d} - d$ *. Si le point P étoit au-deſſus du point a, alors on trouveroit $MF = \frac{gx}{d} + d$.

Il faut donc prouver que yy ou $\overline{PM}^2 . xx - dd$, ou $AP \times Pa :: gg - dd$, ou $AF \times Fa. dd$, ou $\overline{CA}^2$, ou $\overline{Ca}^2$; ce qui eſt facile : car à cauſe du triangle rectangle MPF, $\overline{PM}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{PF}^2$ †, c'eſt-à-dire, en termes analytiques, $yy = \frac{ggxx}{dd} - xx - gg + dd$; ou en multipliant de part & d'autre par dd; on aura $yydd = ggxx - ddxx - ggdd + d^4$, & remettant les termes qui

* *L.* 3. *n.* 60. † *L.* 4. *n.* 7.

qui compoſent cette égalité en proportion, on trouvera $yy. xx-dd :: gg-dd. dd$, ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME IV.

Le quarré d'une Ordonnée quelconque PM *à l'axe* Aa *eſt au rectangle des parties de cet axe, ſavoir à* AP×Pa, *comme le quarré de l'axe conjugué* BB *eſt au quarré de l'autre axe* Aa. Même figure.

Concevons un triangle rectangle ABC; ſelon la Définition de l'axe conjugué, $AB=FC$, on a ſuppoſé $FC=g$, & $AC=d$; ſuppoſons $BC=b$. Donc ABC étant rectangle, & $AB=g$; il faut que $bb=gg-dd$*. Or par le Théorême précédent, $yy. xx-dd :: gg-dd$, ou $bb. dd$. Multipliant bb & dd. par 4, ils demeurent en même raiſon †. Donc $yy. xx-dd :: 4bb. 4dd$. Or $AP\times Pa=xx-dd$. Donc le quarré de yy eſt au rectangle $AP\times Pa$, comme $4bb$, quarré de l'axe conjugué BB ou $2b$, eſt au quarré $4dd$ de l'autre axe Aa égal à $2d$.

THEOREME V.

Le Parametre eſt au diametre comme le quarré d'une Ordonnée quelconque, eſt au rectangle des parties de cet axe faites pas la rencontre de cette Ordonnée.

Soit conſervée la même dénomination des parties que ci-devant & même figure, & m ſoit le Parametre de l'axe Aa, lequel par ſa Définition eſt une troiſieme proportionnelle auxdits axes; ainſi $\div m. 2b. 2d$. Mais à cauſe de cette proportion on aura $m. 2d :: 4bb. 4dd$‡. Or par le Théorême précédent, $4bb$ eſt à $4dd$ comme le quarré yy de l'Ordonnée eſt à $xx-dd$ rectan-

* *L.* 4. *n.* 78. † *L.* 3. *n.* 54. ‡ *L.* 3. *n.* 86.

rectangle des parties de l'axe ; donc $m.\ 2d :: yy.$ $xx - dd$, ce qu'il falloit démontrer.

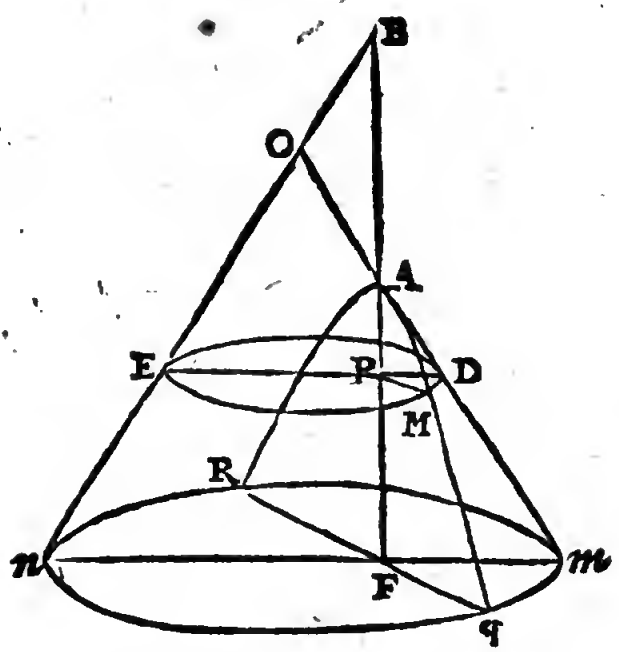
THEOREME VI.

Les quarrez des Ordonnées ſont entre eux comme les rectangles des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes Ordonnées.

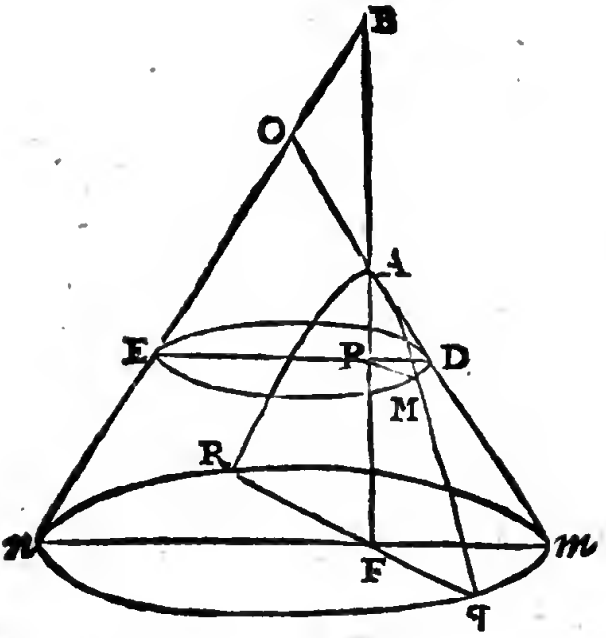
Ce qui eſt évident, puiſque dans quelque endroit que ſe trouve le point P, le parametre m eſt au diametre $2d$, comme yy quarré de l'Ordonnée eſt au rectangle $xx - dd$, ou $AP \times Pa$ fait des parties de cet axe déterminées par l'Ordonnée.

THEOREME VII.

Cette Section Conique qu'on nomme Hyperbole, *eſt la même Courbe, que celle qu'on vient de décrire.*



Soit $m\ O\ n$ un Cône coupé par un plan, qui ren-



rencontre auſſi en *B* l'autre côté *n O* du Cône, prolongé au-deſſus du ſommet *O*. Cette Section *q A R* ſera la Courbe dont on vient de parler, ou cette Courbe eſt veritablement cette Section du Cône qui s'appelle *Hyperbole*.

Soit imaginé un cercle *DME* parallele à *mqn*, celui de la baſe. Leurs diametres coupent l'axe de l'Hyperbole aux points *P* & *F*. Les lignes *MP* & *Fq* ſont perpendiculaires ſur ces diametres auſſi-bien que ſur l'axe *AF**, d'autant qu'elles ſont les communes Sections de deux plans perpendiculaires à celui du triangle; par conſéquent elles ſont des Ordonnées tant du cercle que de la Courbe *DME*. Or $\overline{MP}^2 = DP \times PE$, & $\overline{Fq}^2 = mF \times nF$†. Il faut démontrer que $\frac{\overline{MP}^2}{DP}$, ou

* *L.* 5. *n.* 30. & 20. † *L.* 4. *n.* 29.

$DP \times PE$ eſt à $\overline{Fq}^2$, ou à ſa valeur $mF \times nF$, comme $AP \times PB$ eſt à $AF \times FB$.

Les deux triangles DAP & mAF ſont ſemblables. Les deux triangles FBn, & PBE ſont ſemblables. Donc

$$mF.\ DP :: FA.\ PA.$$
$$nF.\ PE :: FB.\ PB.$$

Multipliant chaque terme de la premiere proportion par le terme qui lui répond dans la ſeconde, les produits ſeront en proportion, étant des rectangles dont les raiſons compoſées des côtez, ſont ſemblables *.

$$DP \times PE.\ mF \times nF :: AP \times PB.\ AF \times FB.$$

Donc puiſque $\overline{MP}^2 = DP \times PE$, & $\overline{Fq}^2 = mF \times nF$.

$\overline{MP}^2.\ \overline{Fq}^2 :: AP \times PB.\ AF \times FB$; ce qu'il falloit prouver.

AVERTISSEMENT.

Si l'on prolonge le côté du Cône, enſorte que l'on imagine un autre Cône oppoſé par le ſommet à celui-ci, il eſt clair que ſi l'on continue le plan coupant, il formera dans cet autre Cône une Section ſemblable, qui ſera l'Hyperbole oppoſée.

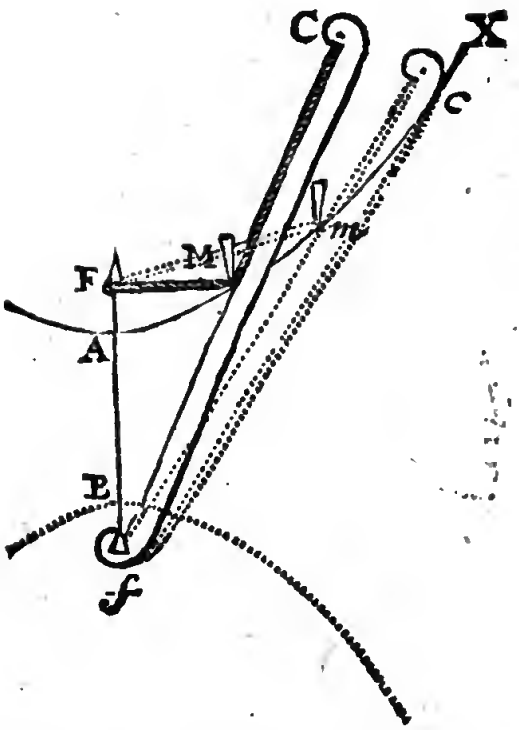
PROBLEME III.

Décrire l'Hyperbole par un mouvement continu.

Soit AMX une hyperbole, *figure ſuivante.* A eſt ſon ſommet, & F ſon foyer. B eſt le ſommet de ſon hyperbole oppoſée, qui a f pour foyer. On peut concevoir que cette hyperbole a été décrite, ou qu'elle le peut être de cette maniere.

La

* *L.* 3. *n.* 77.



La ligne *Cf* coupe l'hyperbole *AMX* au point M. Conſiderons cette ligne *Cf*, comme une règle au bout de laquelle eſt attachée une corde dont l'autre extrémité eſt attachée au foyer *F*. Cette règle eſt fixe par ſon autre bout au foyer de l'hyperbole oppoſée, au tour duquel point *f* elle peut tourner.

Concevons cette règle dans une premiere ſituation, couchée ſur *AB*, & la corde de telle longueur que *M* convient alors avec *A*. Mettons le doigt au point *A* ou *M*, & laiſſons-le couler vers *X* en faiſant tourner la règle; mais tenant toujours la corde jointe & comme colée contre la règle. A meſure que la règle tournera, le doigt conſideré comme une pointe, décrira l'hyperbole *AMX*.

C o-

COROLLAIRE I.

De cette conſtruction il s'enſuit, qu'ayant mené de chaque point de l'Hyperbole deux lignes droites aux deux foyers F *&* f, *la difference de ces deux lignes ſera toujours la même.*

Dans la premiere ſituation où *M* eſt ſur *A*, la règle ſur *AB* ou ſur *Ff*, il eſt évident que la difference de *Mf* avec *MF*, c'eſt-à-dire, *Mf* — *MF*, eſt *AB*, puiſque *FA*=*fB*; cette difference eſt toujours la même dans les autres ſituations. Car à meſure que la règle tourne, & que le doigt coule, la corde *MF* & la partie de la règle *Mf* s'alongent également. Ainſi ces deux grandeurs conſervent une même difference.

COROLLAIRE II.

Une hyperbole ſe peut étendre ou être continuée à l'infini.

Car ſi on prolonge à l'infini la règle *Cf*, & en même tems la corde *MC*, en faiſant tourner la règle, & continuant de preſſer la corde comme ci-deſſus, on prolongera l'hyperbole ſans fin. Il eſt évident que le point *M* s'éloignera de plus en plus du foyer *F*, à meſure que la règle *fC* tournera.

AVERTISSEMENT.

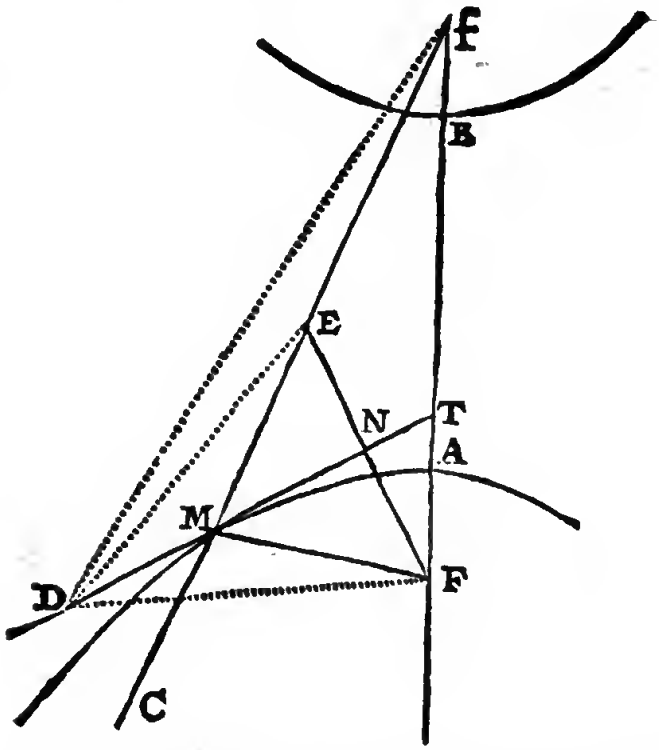
L'hyperbole étant prolongée & continuée à l'infini comme on vient de le dire, elle s'approche de plus en plus d'une certaine ligne droite, ſans jamais la rencontrer; ce qui fait qu'on nomme cette ligne droite l'aſymptote de l'hyperbole. Ce nom qui eſt Grec, marque cette proprieté.

PROBLEME IV.

D'un point quelconque d'une Hyperbole, mener la touchante MT.

Soient *A* & *B* deux hyperboles oppoſées. On a me-

a mené du point donné M aux foyers F & f les lignes MF, Mf, & diviſé l'angle FMf en deux parties égales par la ligne MT; je dis que cette ligne eſt touchante ou tangente.



Soit pris ME égale à MF. Soient encore d'un point quelconque D dans la tangente MT menées les lignes DF, Df & DE. Les triangles MFN & MEN ſeront égaux; comme auſſi NDF & NDE.

Il s'agit de prouver que le point D qui eſt dans la tangente MT, n'eſt point dans l'hyperbole; & qu'ainſi cette tangente ne la touche point, ou ne la rencontre point en D.

Si D étoit dans l'hyperbole, $Df - DF = Mf - MF$, par le Corollaire précédent. Or cela n'eſt

n'eſt pas ; car ME étant pris égale à MF, donc $Mf - MF = Ef$. Et puiſque DE eſt égale à DF, donc $Df = Ef + DF$. Mais dans le triangle DEf, les côtez DE & Ef pris enſemble, ſont plus grands que le côté Df; donc DE ſurpaſſe DF; donc le point D n'eſt point un de ceux de l'hyperbole ; ce que l'on peut dire de tout autre point de la ligne MT, autre que M pris au-deſſus ou au-deſſous de M; donc cette ligne MT ne rencontre l'hyperbole qu'en un point, dont elle eſt touchante.

COROLLAIRE.

Si la Courbe AM *repréſente la Section d'un Miroir hyperbolique*, *&* *que* CM *ſoit un rayon incident qui tombe ſur la ſurface concave de ce Miroir au point* M, *partant de* C, *& tendant vers le foyer* f *de l'Hyperbole oppoſée*, *il ſe réflechira en* F.

L'angle DMC eſt égal à l'angle EMN, égal par la conſtruction à NMF; ainſi DMC eſt égal à NMF. L'angle d'incidence CMD étant donc égal à l'angle de réflexion FMT, le rayon CM réflechira en F au foyer de l'hyperbole. Ce que l'on doit entendre de tout autre rayon incident : Et c'eſt pour cela qu'on a nommé les points F & f, les Foyers.

CEs *Courbes ont un grand nombre d'autres proprietez*, *que l'on peut voir dans l'excellent Traité des Sections Coniques*, *de défunt Monſieur le Marquis de l'Hôpital.*

FIN.

TA-

TABLE

DES PROPOSITIONS

des Elémens d'Euclide, avec les lieux où elles ſe trouvent dans cet Ouvrage. Le premier chiffre marque les Propoſitions d'Euclide. Le ſecond, qui un eſt chiffre Romain, indique le Livre de cet Ouvrage où elles ſe trouvent. Et le troiſieme, dans quel nombre de ce Livre. Les VII. VIII. & IX. Livres d'Euclide ne regardent que les nombres, dont il ne s'agit pas dans la Géometrie. On ne les cite preſque jamais, non plus que le X. Livre; ainſi on n'a pas cru qu'il fût utile de rapporter les Propoſitions de ces Livres, comme on l'a dit ailleurs.

EUCLIDE LIVRE PREMIER.

1	II.	69	19	II.	89	34	II.	128
2	I.	30	20	II.	66	35	II.	129
3	I.	30	21	I.	57	36	II.	129
4	II.	98	22	II.	67	37	II.	134
5	II.	83			& 68	38	II.	134
6	II.	90	23	II.	29	39	II.	136
7	II.	93	24	II.	104	40	II.	136
8	II.	94	25	II.	104	41	II.	133
9	II.	31	26	II.	95	42	II.	138
10	I.	48	27	II.	26	43	II.	132
11	I.	47	28	II.	28	44	II.	132
12	I.	46	29	II.	25	45	II.	140
13	II.	17	30	I.	73	46	II.	121
14	II.	20	31	I.	72	47	II.	242
15	II.	21	32	II.	79		IV.	78
16	II.	74		73 &	75	48	II.	142
17	II.	79	33	II.	112			
18	II.	89			& 117			

EUCLIDE LIVRE SECOND.

1	III.	17		6	III.	22		11	IV.	54	
2	III.	18		7	III.	23		12	III.	27	
3	III.	19		8	III.	24		13	III.	28	
4	III.	20		9	III.	25		14	IV.	84	
5	III.	21		10	III.	26					

EUCLIDE LIVRE TROISIEME.

1	I.	87		14	I.	94		27	II.	43	
2	I.	83		15	I.	95		28	I.	32	
3	I.	91				& 96		29	I.	32	
		& 92		16	I.	106		30	I.	35	
4	I.	93				& 109		31	II.	44	
	II.	48			II.	32				45	
5	I.	17		17	I.	113				& 46	
6	I.	78		18	I.	106		32	II.	37	
7	I.	102		19	I.	108		33	II.	49	
8	I.	99		20	II.	41		34	II.	48	
9	I.	102		21	II.	40		35	IV.	55	
		& 104		22	II.	114		36	IV.	56	
10	I.	89		23	I.	98		37	IV.	59	
11	I.	81		24	I.	32					
12	I.	82		25	I.	80					
13	I.	80		26	II.	42					

EUCLIDE LIVRE QUATRIEME.

1	I.	30		7	II.	126		12	IV.	160	
2	II.	100		8	II.	125		13	IV.	161	
3	II.	101		9	II.	127		14	IV.	162	
4	II.	102		10	IV.	149		15	IV.	163	
5	II.	70				& 151		16	IV.	163	
6	II.	124		11	IV.	158					

EUCLIDE LIVRE CINQUIEME.

1	III.	64		8	III.	91		15	III.	64	
2	III.	65		9	III.	52		16	III.	46	
3	III.	66		10	III.	92				& 56	
4	III.	67		11	III.	53		17	III	51	
5	III.	68		12	III.	50				& 57	
6	III.	69		13	III.	93		18	III.	49	
7	III.	70		14	III.	94		19	III.	48	

20 III. 91
21 III. 96
22 III. 62
23 III. 88
24 III. 68
25 III. 97

EUCLIDE LIVRE SIXIEME.

1 III. 99
2 IV. 16
3 IV. 17
4 IV. 10
5 IV. 12
6 IV. 13
7 IV. 14
8 IV. 27
9 IV. 22
10 IV. 20
11 IV. 23
12 IV. 24
13 IV. 29
14 IV. 82
15 IV. 83
16 III. 56
17 III. 57
18 IV. 26 & 85
19 IV. 71
20 IV. 90
21 IV. 11
22 IV. 74
23 IV. 81
24 IV. 51
25 IV. 86
26 IV. 52
27 IV. 94
28 IV. 95
29 IV. 96
30 IV. 34
31 IV. 79
32 IV. 15
33 IV. 46

EUCLIDE LIVRE ONZIEME.

1 V. 7
2 V. 8
3 V. 10
4 V. 19
5 V. 21
6 V. 29
7 V. 14
8 V. 29
9 V. 35
10 V. 36
11 V. 18
12 V. 22
13 V. 23
14 V. 33
15 V. 37
16 V. 34
17 V. 38
18 V. 31
19 V. 30
20 V. 49
21 V. 51
22 V. 50
23 V. 52
24 V. 107
25 V. 108
26 V. 53
27 V. 103
28 V. 105
29, 30, 31 V. 109
32 V. 111
33 V. 133
34 V. 136
35 V. 54
36 V. 138
37 V. 139
38 V. 25
39 V. 106
40 V. 114

EUCLIDE LIVRE DOUZIEME.

1 IV. 92
2 IV. 93
3 V. 124
4 V. 125
5, 6 V. 123
7 V. 119
8 V. 133
9 V. 137
10 V. 128
11 V. 112 & 130
12 V. 134
13 V. 113
14 V. 112 & 130
15 V. 137
16 V. 146
17 V. 147
18 V. 143

EU-

EUCLIDE LIVRE TREIZIEME.

1	IV.	66	9	IV.	154			& 154
2	IV.	68	10	IV.	164	16	V.	178
3	IV.	69	11	IV.	170			& 167
4	IV.	70	12	IV.	146	17	V.	161
5	IV.	35	13	V.	156			& 162
6	IV.	139			& 152	18	V.	173
7	IV.	168	14	V.	156			
8	IV.	169	15	V.	153			

EUCLIDE LIVRE QUATORZIEME.

1	V.	176	4	V.	174	7	V.	180
2	IV.	67.	5	V.	178	8	V.	157
3	V.	172	6	V.	179			

EUCLIDE LIVRE QUINZIEME.

1	V.	181	3	V.	183	5	V.	185
2	V.	182	4	V.	184			

CATALOGUE
DES
LIVRES NOUVEAUX
De Mathématique & de Phyſique,

Qui ſe trouvent à AMSTERDAM,

Chez

PIERRE MORTIER.

A.

ABregé de Mathématique pour l'Uſage de Sa Majeſté Impériale de Ruſſie, 2 vol. 8. Petersbourg 1728.

Analyſe des Infiniment Petits, par Mr. de l'Hôpital, 4. Paris 1716.

L'Arithmétique par Tarif, par Mirabaud, 4. 2 vol. 1722.

—— Nouvelle d'une Méthode très facile par ſes Abregez & par la ſupreſſion des parties Aliquotes, par Monier de Clairecombe, 12. Paris 1719.

Art de Tourner, ou de faire en perfection toutes ſortes d'ouvrages au tour, enrichi de près de quatre-vingts planches en taille douce, par Charles Plumier, fol. Paris.

C.

CAlculs d'uſage pour trouver promptement les Poids & les Meſures ſuivant leur prix, 8. Paris 1726.

La

La Chronologie des Anciens Royaumes corrigée, traduite de l'Anglois du Chev. I. Newton, 4. Paris 1728.
Commentaires sur l'Analyse des Infiniment petits par Crousaz, 4. fig.
—— sur la Géometrie de Descartes, par le Pere Rabuel. 4. 1730.
Commerce rendu facile, ou l'Arithmetique Universelle débarrassée des parties aliquotes, par Clairecombe. 4. Haye 1723.
Communes Mesures & Racines communes, par le Sr. Taneguy le Fevre, 8. Paris 1714.
Cours de Mathématiques par Ozanam. 8. Paris 4 vol. 1693.
—— d'Architecture par Blondel. folio.
—— —— qui comprend les Ordres de Vignole, par Daviler, 4. 1730.
—— de Mathématique, par Blondel, 4. 2 vol. 1699. avec fig.
—— Nouveaux de Mathématiques à l'usage de Artillerie & du Génie, par Belidor, 4. Paris, 1725. fig.
—— de Physique par Hartsoeker, 12. avec fig. 1730.

D.

DEscription abregée d'une Horloge d'une nouvelle invention, pour la juste mesure du tems sur Mer, avec le Jugement de l'Académie Royale des Sciences, & une Dissertation sur la nature des Tentatives, par Sully. 4. Paris 1726.
Dictionaire de l'Academie Françoise, fol. 2 vol. sec. Ed. Paris.
—— de Marine, contenant les termes de

la Navigation & de l'Architecture Navale, 4. avec fig.

Dictionaire des Arts & des Sciences, de M. D. C. de l'Académie Françoiſe, Nouv. Edition, revue, corrigée & augmentée par MM. de l'Académie Royale des Sciences, fol. 2 vol. Paris 1732.

—— Mathématique d'Ozanam, 4. fig.

Diſcours touchant le point de Vue, par Le Clerc, 12. Paris 1679.

E.

EClairciſſemens ſur l'Analyſe des Infiniment petits du Marq. de l'Hôpital, par Varignon, 4. fig. Paris.

Elémens d'Euclide, par Dechales. 12. Paris 1728.

—— de Géometrie, avec un Traité des Logarithmes, par Mr. de Malezieu, 8. Paris 1722.

—— de Mathématiques par Preſtet, 4. 2 vol.

—— de Géometrie, ou de la Meſure de l'Etendue, par le P. Lamy, 12. Amſt. 1734.

—— des Mathématiques, ou Traité de la Grandeur en général, par le R. P. B. Lamy, 12. Nouv. Edition. Amſt. 1733.

Entrétiens Phyſiques d'Ariſte & d'Eudoxe, ou Phyſique nouv. en Dialogues, par le Pere Regnault. 12. 4 vol. Amſt. avec fig. 1732. & 1733.

Entretiens ſur les Sciences, dans leſquels on apprend comme l'on doit étudier les Sciences,

ces, & s'en ſervir pour ſe faire l'Eſprit juſte & le Cœur droit, par le Pere Lamy, 12. 1724.

—— ſur les Vies & les Ouvrages des plus excellens Peintres & Architectes anciens & modernes, par Mr. Felibien, 12. 6 vol.

Eſſais d'une Nouv. Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux, par Bernoulli, 8. fig.

Etat Militaire de l'Empire Ottoman, ſes Progres, & ſa Decadence, en François & Italien, par le Comte Marſigli, fol. Haye 1732. avec fig.

Examen des Prejugez Vulgaires, avec les Elemens de Metaphyſique, par le P. Buffier, 12. Paris 1725.

Exiſtence de Dieu demontrée par les merveilles de la Nature, par Nieuwenteyt, 4. 1728.

F.

FOnctions & principal devoir d'un Officier de Cavalerie, augmentées des Reflexions ſur l'Art Militaire, 12. Paris, 1726.

—— des Generaux, ou l'Art de conduire une Armée, par Grimaret, 8. avec fig. Haye, 1710.

Fortifications de Hartman, 8. fig.

—— de Landsbergen, 4.

—— d'Ozanam, 8.

G.

LA Géometrie Pratique par Mr. Mallet, 4 vol. 8. avec plus de 500 figures en

Taille douce, Paris 1702.

La Géometrie Pratique de le Clerc, 12. avec fig.

—— de Mr. Deſcartes. 12.

—— de Mr. de Crouſaz, 12. 2 vol. fig.

Gnomonique Univerſelle, ou Science de Tracer les Cadrans Solaires ſur toutes ſortes de ſurfaces tant ſtables que mobiles, 8. Paris, 1701.

H.

HArtſoeker Conjectures Phyſiques, 4. 2 vol. & autres œuvres.

Hiſtoire Militaire de Louis XIV. par le Marq. de Quinci, 4. 7 vol. fig.

—— de l'Académie appellée l'Inſtitut des Sciences & des Arts, établi à Boulogne en 1712. avec les Pièces authentiques, d'où l'on a tiré les circonſtances de ce récit, 8.

—— de la Milice Françoiſe, par le Pere Daniel, 4. 2 vol. fig.

—— de l'Academie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématique, Phyſique &c. tirés des Regiſtres de la dite Académie, juſqu'à l'année 1730. 12.

—— de Polybe, traduite du Grec par le P. Vincent Thuillier, avec un Commentaire ou un Corps de Science Militaire, enrichi de Notes Critiques & Hiſtoriques, où toutes les parties de la Guerre, ſoit pour l'Offenſive, ſoit pour la Défenſive, ſont expliquées, démontrées, & repréſentées en figu-

figures, par Mr. le Chevalier de Folard, 4. 6 vol. fig. Amſt. 1730.

— Le même Ouvrage ſur du grand papier, 6 vol. 4.

I.

INſtruction Nouv. à la Géometrie Pratique, tirée des meilleurs Auteurs, par le Chevalier Daudet 12. 3 vol. 1730.

Journal des Obſervations Phyſiques, Mathématiques & Botaniques, par le Pere Feuillée, 4. fig.

L.

LEttres Critiques de Monſieur Saurin de l'Academie R. des Sciences à Mr. *** ſur le Traité de Mathématique du P. Caſtel. 4. Paris 1730.

M.

MAniere de bâtir pour toutes ſortes de perſonnes, par Pierre le Muet, Architecte du Roi, fol.

Méchanique ou Statique dont le projet fut donné par Mr. Varignon, 4. 2 vol. avec fig. Paris 1723.

Mémoires d'Artillerie, 4. 2 vol. avec fig.

— ſur la Guerre, où l'on a raſſemblé les Maximes les plus néceſſaires dans les Operations de l'Art Militaire, 12. Amſt. 1731.

— de l'Académie Royale des Sciences, contenant les Ouvrages adoptez par cette Academie avant ſon renouvellement en 1699.

5 vol. 4. enrichis de beaucoup de figures, Haye 1721.
— Les volumes ſuivans ſous preſſe.
Méthode pour règler les Montres & les Pendules, par Mr. Sully, 12. Paris 1728. avec fig.
— pour la Meſure des ſurfaces, par Carré, 4. avec fig. Paris 1700.

N.

NOuveau Cours de Mathématique par Belidor, 4. fig.
Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le projet fut donné par Mr. Varignon, 4. 2 vol. fig.

O.

OBſervations ſur toutes les parties de la Phyſique, 12. 2 vol.
— Mathématiques, Aſtronomiques & Géographiques, par le P. Souciet, 4. Paris 1729.
— idem le tome 2 & 3. contenant l'Hiſtoire, & un Traité de l'Aſtronomie Chinoiſe avec des Diſſertations &c. 4. Paris.
Oeuvres de Pardies, 12. 1725.
— Poſthumes de Rohault, 12. 2 vol.
— de Deſcartes, 12. 13 vol.
— diverſes de Phyſique & de Méchanique de Meſſrs. Perrault, 4. 2 vol.
Ouvrages adoptés de l'Académie des Sciences, 4. 5 vol. 1729. & les ſuivans ſous preſſe.

P.

Parallele de l'Architecture Antique & Moderne, fol. Paris avec fig.
— de l'Architecture antique & de la moderne, avec un Recueil des dix principaux Auteurs, qui ont écrit des cinq Ordres. Planches originales, fol. Paris, seconde Edition augmentée.
Phyſique de Rohault, 8. 2 vol.
— Occulte, ou Traité de la Baguette Divinatoire, 12. 2 vol. 1722.
Pluralité des Mondes, par Huygens, 12. fig.
Pratique de la Mémoire Artificielle, par Buffier, 12. 2 vol. Paris, 1727.
Principes de la Fortification moderne, 8. fig.
— de l'Architecture, de la Sculpture & de la Peinture, par Felibien, 4. Paris 1699.

R.

Recherches ſur les Courbes à double Courbure, 4. Paris 1731.
Recréations Mathématiques, par Ozanam, 8. 4 vol. fig.
Recueil de pluſieurs Ouvrages de Mathématiques &c. par Mr. de Serviere, 4. fig.
— des Pieces, qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, 4. Paris.
— des Lettres au ſujet des Maléfices & des Sortileges, par Mr. Boiſſier 12. Paris 1731.

S.

S.

SCience des Ingenieurs, par Belidor, 4. tome premier. Paris 1729. avec fig.
Secrets concernant les Arts & les Métiers, 12. 4 vol.
Sentimens d'un homme de Guerre sur le Nouveaux Systême du Chevalier de Folard, par M. D***. 4. Haye 1733. avec fig.
Spectacle de la Nature, ou Entretiens sur les Particularités de l'Histoire Naturelle, 12. 2 vol. Utrecht 1733.
Systême Nouveau du Microcosme par Tymogue, 8. 1727.

T.

TEinturier parfait, ou instruction pour la teinture des Laines, 12. Paris 1721.
Traité de la Physique par Castel, 12. 2 vol.
—— du Mouvement & de la Mesure des Eaux coulantes, par Varignon, 4.
—— de la Peinture en mignature, pour apprendre aisément à peindre sans maitre. 12.
—— de la Construction des Grands Chemins des Romains & des Modernes, 8. fig.
—— d'Optique par Newton, traduit de l'Anglois, 12.
—— de l'Algebre par Crousaz, 8. fig.
—— d'Architecture, avec des Remarques & des Observations très utiles par Seb. le Clerc, 4. Paris 1718.
—— des Forces mouvantes pour la pratique des Arts & Métiers, par Camus, 8. Paris 1729.

Trai-

Traité Analytique des Sections Coniques, par le Marq. de l'Hôpital, 4.
— de la Conſtruction & des principaux uſages des Inſtrumens de Mathématiques, avec les figures, par Bion, 4.
— des Metaux & des Mineraux, par Chambon, 12. Paris 1714.
— de la Grandeur de la Terre, par Caſſini, 12.
— d'Algebre, ou Principes généraux pour réſoudre les Queſtions de Mathématiques, par Rolle. 4. Paris.
— de l'incertitude des Sciences. 12. 1725.
— des Machines & Inventions extraordinaires, par Papin. 8. Paris.
— de Perſpective pratique, avec des Remarques ſur l'Architecture, par Courtonne. fol. Paris 1725.
— d'Horlogerie pour les Montres & les Pendules, avec l'Hiſtoire Ancienne & Moderne de l'Horlogerie, trad. de l'Anglois de Mr. Derham, 12. Paris 1731. avec fig.
— de Phyſique, par Rohault. 8.
— de la Peinture, par Leonard de Vinci. 12. Paris avec fig.
— de la Mécanique, par Mr. de la Hire, 4. Paris 1729.
— Méthodique & abregé de toutes les Mathematiques, par Mr. de Neufegliſe, 2 vol. 8. avec fig. Lion 1700.
— des Moyens de rendre les Rivieres Navigables &c. Amſt. 1696. fig.

V.

Vitruvius Britannicus, ou l'Architecture Britannique, contenant les plans, élevations & sections des Bâtimens reguliers, tant particuliers que publics, de la Grande Bretagne, avec de grandes planches en taille douce. fol. 3 vol.

Usage du Pantometre, 12. Paris avec fig.

000776